Nouvelle-Calédonie novembre 2014

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que $A < B$:

Entrées :	A et B entiers naturels tels que $A < B$
Variables :	D est un entier Les variables d'entrées A et B

Traitement :	Affecter à D la valeur de $B - A$
	Tant que $D > 0$
	B prend la valeur de A
	A prend la valeur de D
	    Si $B > A$ Alors
	        D prend la valeur de $B - A$
	    Sinon
	        D prend la valeur de $A - B$
	    Fin Si
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher A.

1. On entre $A = 12$ et $B = 14$.
En remplissant le tableau donné en **annexe**, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

2. Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B.
En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1.

a. Justifier qu'il existe des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) $221x - 331y = 1$.

b. Vérifier que le couple $(3\,;\,2)$ est une solution de l'équation (E).
En déduire l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$u_n = 2 + 221n \text{ et } \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 331 \end{cases}$$

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.

b. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p\,;\,q)$ tels que $u_p = v_q$, $0 \leq p \leq 500$ et $0 \leq q \leq 500$.

ANNEXE

A	B	D
12	14	

CORRECTION

1.

A	B	D
12	14	2
2	12	10
10	2	8
8	10	2
2	8	6
6	2	4
4	6	2
2	4	2
2	2	0

2. *a.* Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B, en entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1 donc A et B sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) $221\,x - 331\,y = 1$.

b. $3 \times 221 = 663$ et $2 \times 331 = 662$ donc $3 \times 221 - 2 \times 331 = 1$, le couple $(3 ; 2)$ est une solution de l'équation (E).

c. $221\,x - 331\,y = 1$ admet pour solution $(3 ; 2)$

$\begin{cases} 221\,x - 331\,y = 1 \\ 221\,x_0 - 331\,y_0 = 1 \end{cases}$ donc $221\,(x - x_0) - 331\,(y - y_0) = 0$ donc $221\,(x - x_0) = 331\,(y - y_0)$

221 et 15 sont premiers entre eux et 221 divise $331\,(y - y_0)$ donc d'après le théorème de Gauss, 221 divise $y - y_0$.
Il existe un entier k tel que $y - y_0 = 221\,k$
En remplaçant dans $221\,(x - x_0) = 331\,(y - y_0)$ alors $x - x_0 = 331\,k$ soit $x = 3 + 331\,k$ et $y = 2 + 221\,k$

Vérification : $221\,x - 331\,y = 221\,(x_0 - 331\,k) - 331\,(y_0 + 221\,k) = 221\,x_0 - 331\,y_0 = 1$
Les couples solutions de $221\,x - 331\,y = 1$ sont $(3 + 331\,k ; 2 + 221\,k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. *a.* (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 331 donc $v_n = 3 + 331\,n$

b. $u_p = v_q \Leftrightarrow 2 + 221\,p = 3 + 331\,q \Leftrightarrow 221\,p - 331\,q = 1 \Leftrightarrow p = 3 + 331\,k$ et $q = 2 + 221\,k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$0 \le p \le 500 \Leftrightarrow 0 \le 3 + 331\,k \le 500 \Leftrightarrow k \in \{0 ; 1\}$

$0 \le q \le 500 \Leftrightarrow 0 \le 2 + 221\,k \le 500 \Leftrightarrow k \in \{0 ; 1 ; 2\}$

Les deux conditions sont vérifiées pour $k \in \{0 ; 1\}$.

Pour $k = 0$, $(p , q) = (3, 2)$ donc $u_3 = v_2 = 665$.
Pour $k = 1$, $(p , q) = (334 , 223)$ donc $u_{334} = v_{223} = 73\,816$.