Liban mai 2014

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.

Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.

Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.

Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.

Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.

Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5% des individus tombent malades ;
- 20% des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.

On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est-à-dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

2. *a.* Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

b. Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n. On admet que $c_{n+1} = 0,2\, b_n + c_n$.

Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3. *a.* Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n) & 0,8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4\times 0,95^n + 0,8^n) & 1 - 0,8^n & 1 \end{pmatrix}$

4. *a.* Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n)$

b. Déterminer la limite de la suite (b_n).

c. On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroît.

On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

À cet effet, on utilise l'algorithme donné en **annexe**, dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).

Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en **annexe**.

Conclure.

ANNEXE

```
Variables :        b, b' , x, y sont des réels
                   k est un entier naturel
Initialisation :   Affecter à b la valeur 0
                   Affecter à b' la valeur 0,05
                   Affecter à k la valeur 0
                   Affecter à x la valeur 0,95
                   Affecter à y la valeur 0,8
Traitement :       Tant que b < b'
                   | Affecter à k la valeur k + 1
                   | Affecter à b la valeur b'
                   | Affecter à x la valeur 0,95 x
                   | Affecter à y la valeur 0,80 y
                   | Affecter à b' la valeur ……
                   Fin de tant que
Sortie :           Afficher …………
```

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7e passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8e passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9e passage éventuel dans la boucle Tant que						

CORRECTION

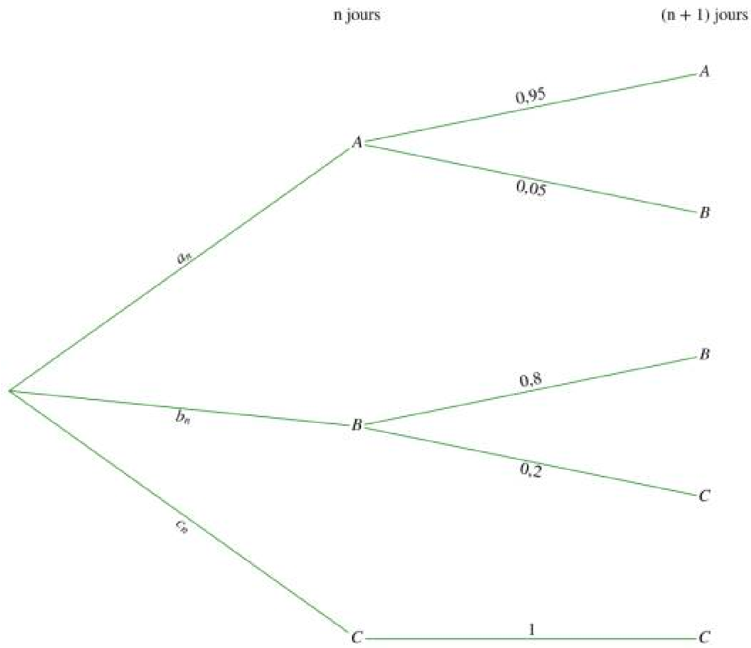
1. $a_1 = 0{,}95\, a_0 = 0{,}95$
$b_1 = 0{,}05\, a_0 = 0{,}05$
$c_1 = 0$

2. *a.* La proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant est de 95 % donc $a_{n+1} = 0{,}95\, a_n$

b. $b_{n+1} = 0{,}05\, a_n + 0{,}8\, b_n$ et $c_{n+1} = 0{,}2\, b_n + c_n$

3. *a.* $A \times U_n = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

$A \times U_n = \begin{pmatrix} 0{,}95 a_n \\ 0{,}05\, a_n + 0{,}8\, b_n \\ 0{,}2\, b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ donc, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$



b. **Initialisation :** $D^1 = \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La propriété est initialisée.

Hérédité : montrons que pour tout entier naturel n, si $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $D^{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D^{n+1} = D^n \times D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $D^{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n non nul, $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. *a.* $U_n = A^n \times U_0$ avec $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $U_n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n) \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

donc pour tout entier naturel n : $b_n = \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n)$.

b. Pour tout entier naturel n : $b_n = \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n)$, $-1 < 0{,}95 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$, de même $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

c. On veut tester si $b_n < b_{n+1}$ (donc si la maladie se développe) donc b de l'algorithme correspond à b_n et b' à b_{n+1}.

	k	b	x	y	b'
Initialisation	0	0	0,95	0,80	0,05
Après le 1er passage dans la boucle Tant que	1	0,05	$0{,}95 \times 0{,}95 = 0{,}95^2$	$0{,}80 \times 0{,}80 = 0{,}80^2$	$\frac{1}{3}(x - y)$

Il faut donc compléter l'algorithme :

Variables :	b, b', x, y sont des réels k est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à b la valeur 0 Affecter à b' la valeur 0,05 Affecter à k la valeur 0 Affecter à x la valeur 0,95 Affecter à y la valeur 0,8
Traitement :	Tant que $b < b'$ Affecter à k la valeur $k + 1$ Affecter à b la valeur b' Affecter à x la valeur 0,95 x Affecter à y la valeur 0,80 y Affecter à b' la valeur $\frac{1}{3}(x - y)$ Fin de tant que
Sortie :	Afficher k

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7e passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8e passage éventuel dans la boucle Tant que	8	0,1652	0,6302	0,1342	0,1653	VRAI
Après le 9e passage éventuel dans la boucle Tant que	9	0,1653	0,5987	0,1074	0,1638	FAUX

Pour chaque ligne du tableau, b désigne b_k et b' désigne b_{k+1} ; on a donc :

k	7	8	9	10
b_k	0,1628	0,1652	0,1653	0,1637

Le rang du jour où le pic épidémique est atteint est donc 9.