Pondichéry avril 2017

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication a » ;

C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0{,}03\,x + 0{,}95$.
2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable. Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.
2. Calculer $P(Z > 2)$.
3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Calculer $P(83 \leq X \leq 87)$.

Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?

2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que : $P(85 - a \leq X \leq 85 + a) = 0{,}9$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle [81,7 ; 88,3].

Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.

Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

EXERCICE 2 (3 points) Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère l'équation (E) : $z^2 - 6z + c = 0$ où c est un réel strictement supérieur à 9.

a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

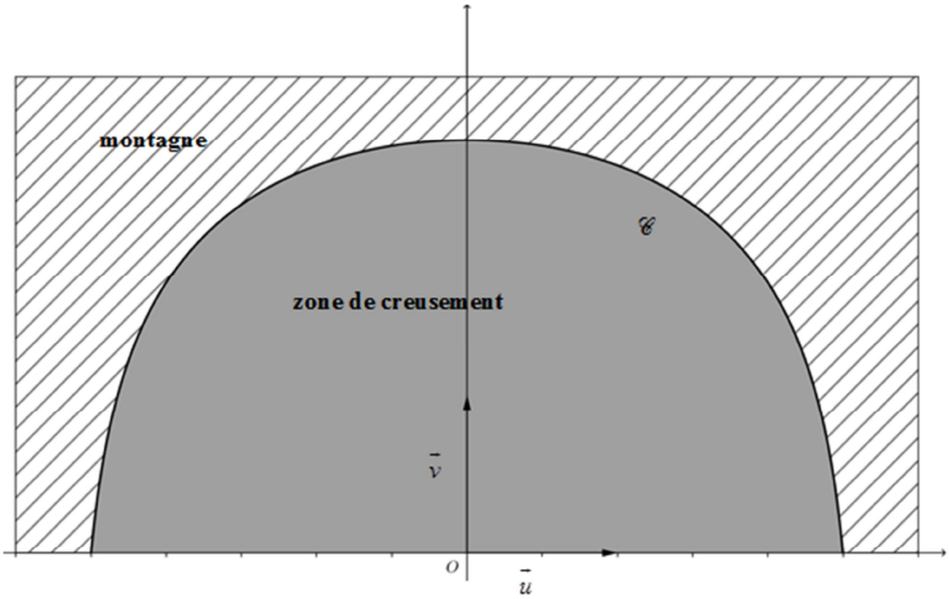
2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B .

Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.
Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 *m*, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [– 2,5 ; 2,5] par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 + 13{,}5).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction *f*

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2{,}5 ; 2{,}5]$.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur [– 2,5 ; 2,5]. En déduire le signe de f sur [– 2,5 ; 2,5].

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.
2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est $\mathscr{A} = 8\displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$ notée a.

On admet que : $a \leq I \leq a + \dfrac{f(0) - f(2{,}5)}{n} \times 2{,}5$

a. Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$. Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.

b. En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Annexe

```
Variables
    R et S sont des réels
    n et k sont des entiers
Traitement
    S prend la valeur 0
    Demander la valeur de n
    Pour k variant de 1 à n faire
        R prend la valeur (2,5/n) . f((2,5/n) . k)
        S prend la valeur S + R
    Fin Pour
    Afficher S
```

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S, arrondies à 10^{-6}, obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	S = 0	$n = 50$	
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	………	………
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	………
	………	………	………
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	49	0,020 106	5,197 538
	50	………	………
Affichage	S =		

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_{n+1} = 2^n$;

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3080	1024
13	11	6153	2048
14	12	12298	4096
15	13	24587	8192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$.

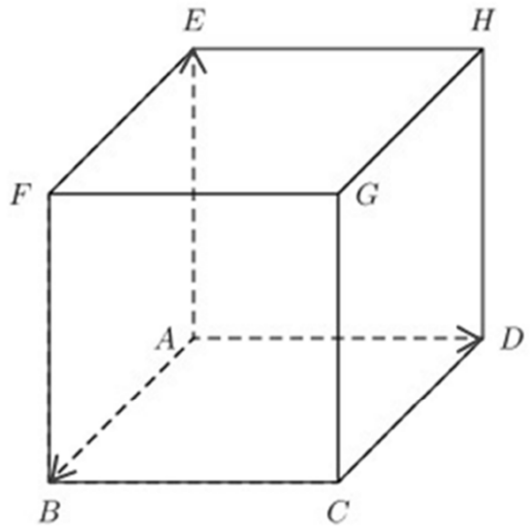
Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

EXERCICE 5 (3 points) Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH fourni en annexe. L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

On note P le plan d'équation $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$

Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan P. La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.



EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$u_0 = v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?
2. Soit n un entier naturel.

Conjecturer la valeur de PGCD $(u_n ; v_n)$. Aucune justification n'est demandée.

3. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1258291	838861
13	11	5033165	3355443
14	12	20132659	13421773
15	13	80530637	53687091

Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge ». Qu'en penser ?

Partie B : Étude arithmétique

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$
2. Soit n un entier naturel.

Déduire de la question précédente la valeur de PGCD $(u_n ; v_n)$.

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n, on définit :

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3\times 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$

1. *a*. Montrer que la matrice $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

b. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + 3\times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$

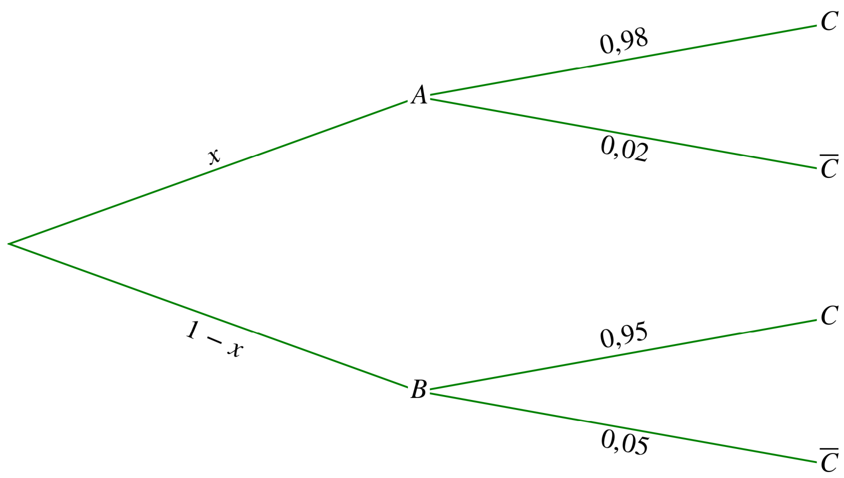
Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}$

b. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

CORRECTION

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Partie A



1. P(C) = P(A ∩ C) + P(B ∩ C) = 0,98 x + 0,95 (1 – x) = 0,03 x + 0,95.

2. P(C) = 0,96 donc 0,03 x = 0,01 soit $x = \frac{1}{3}$ donc P(A) = $\frac{1}{3}$ et P(B) = $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ = 2 P(A)

La probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.

E(X) = 5 = $\frac{1}{\lambda}$ donc $\lambda = \frac{1}{5}$ = 0,2

2. P(Z > 2) = $e^{-2\lambda} = e^{-0,4}$ donc P(Z) > 2 = 0,670

3. Z suit une loi à durée de vie sans vieillissement donc sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans est égale à la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 – 3 = 2 ans soit P(Z) > 2
soit 0,670.

Partie C

1. P(83 ≤ X ≤ 87) = 0,683 à 10^{-3} près

La probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage est 1 – P(83 ≤ X ≤ 87) soit 0,317.

2. P(85 – a ≤ X ≤ 85 + a) = 0,9 ⇔ 85 – a = 81,710 et 85 + a = 88,290 ⇔ a = 3,290

90 % des tablettes de 100 g de chocolat commercialisables, ont un taux de cacao compris entre 81,71 % et 88,29 %.

3. Soit n = 550 et p = 0,9

$n \geq 30$, $n\,p > 5$ et $n\,(1 - p) > 5$ donc les critères d'utilisation d'un intervalle de fluctuation au risque 5 %, sont réunis.

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \right]$$ donc I = [0,89 412 ; 0,90 588]

Sur l'échantillon prélevé, la fréquence de tablettes répondant aux critères est $1 - \frac{80}{550}$ soit environ 0,855

0,855 ∉ I donc au vu de l'échantillon prélevé, on peut remettre en cause l'affirmation de la chocolaterie au risque 5 %.

EXERCICE 2 (3 points) Commun à tous les candidats

1. *a.* Δ = 36 – 4 c = 4 (9 – c) or c > 9 donc Δ < 0 donc (E) admet deux solutions complexes non réelles.

b. $z_A = \frac{6 + 2\,i\sqrt{c-9}}{2} = 3 + i\sqrt{c-9}$ et z_B est le conjugué de z_A donc $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

2. z_B est le conjugué de z_A donc $|z_B| = |z_A|$ soit OB = OA donc le triangle OAB est isocèle en O.

3. le triangle OAB est isocèle en O donc s'il est rectangle, il ne peut l'être qu'en O.

Le triangle OAB est rectangle en O ⇔ $OA^2 + OB^2 = AB^2$ ⇔ $9 + (c - 9) + 9 + (c - 9) = |3 + i\sqrt{c-9} - (3 - i\sqrt{c-9})|^2$

⇔ $2c = |2\,i\sqrt{c-9}|^2$ ⇔ $2c = 4(c - 9)$ ⇔ $2c - 36 = 0$ ⇔ $c = 18$

EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats

On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [– 2,5 ; 2,5] par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 + 13{,}5).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction *f*

1. $f'(x) = \dfrac{-2x}{-2x^2+13{,}5}$ pour $x \in [-2{,}5\ ;\ 2{,}5]$.

2. Si $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ alors $0 \leq x^2 \leq 2{,}5^2$ donc $0 \leq 2x^2 \leq 2 \times 6{,}5^2$ soit $0 \leq 2x^2 \leq 12{,}5$ donc $-2x^2 + 13{,}5 > 0$

$f'(x)$ a le même signe que $-2x$

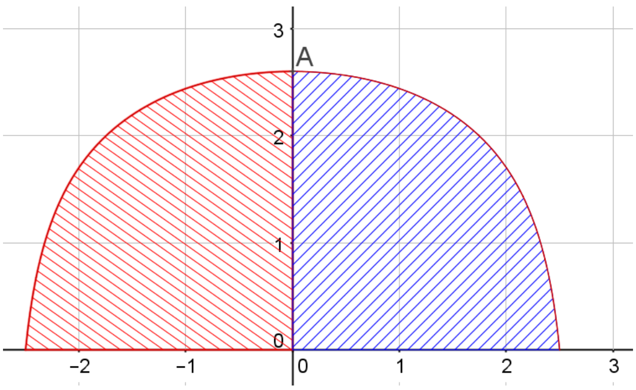
x	$-2{,}5$	0	$2{,}5$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$f(-2{,}5)$ ↗	$f(0)$	↘ $f(2{,}5)$

$f(-2{,}5) = f(2{,}5) = 0$ donc pour tout x de [– 2,5 ; 2,5], $f(x) \geq 0$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

1. $f(-2{,}5) = f(2{,}5) = 0$ donc si la courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre O, le rayon de cet arc est 2,5.
$f(0) \neq 2{,}5$ donc le point A(0 ; $f(0)$) n'appartient pas à l'arc de cercle de centre O et de rayon 2,5.
La courbe $\mathscr{C}$ n'est pas un arc de cercle de centre O.

2. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc les deux domaines limité l'un par la courbe, les axes de coordonnées et pour l'un la droite d'équation $x = -2{,}5$ (aire hachurée rouge) et pour l'autre la droite d'équation $x = 2{,}5$ (aire hachurée bleue) ont la même aire.



La fonction f est positive sur [– 2,5 ; 2,5], donc cette aire commune est égale à $\displaystyle\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$

L'aire limitée par la courbe et l'axe des abscisses est donc égale à $\displaystyle 2\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$, exprimée en unité d'aire.

La courbe est représentée dans un repère orthonormal, d'unité 2 m donc une unité d'aire est $2^2\ m^2$ donc l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est $\mathscr{A} = \displaystyle 4 \times 2\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$ soit $\displaystyle 8\int_0^{2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$

3. *a*.

Initialisation	S = 0	n = 50

Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	0,130 116	0,130 116
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	0,519 981
	………	………	………
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	49	0,020 106	5,197 538
	50	0,000 000	5,197 538
Affichage	S =	5,197 538	

b. Une valeur approchée par défaut de a est 5,197538 donc $5{,}197\,538 \leq I \leq 5{,}197\,539 + \dfrac{f(0) - f(2{,}5)}{n} \times 2{,}5$

soit $5{,}197\,538 \leq I \leq 5{,}327\,673$. L'aire $\mathscr{A}$ de la zone de creusement est donc de 8 I soit approximativement 43 m^2

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Conjectures

1. Formule entrée en cellule B3 : $\boxed{= 2 * B2 – A2 + 3}$ Formule entrée en cellule C3 : $\boxed{= 2 * C2}$

2. Conjectures : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 3$

rang n	terme u_n	terme v_n	terme $\dfrac{u_n}{v_n}$
0	1	1	1
1	5	2	2,5
2	12	4	3
3	25	8	3,125
4	50	16	3,125
5	99	32	3,09375
6	196	64	3,0625
7	389	128	3,0390625
8	774	256	3,0234375
9	1543	512	3,013671875
10	3080	1024	3,0078125
11	6153	2048	3,004394531
12	12298	4096	3,002441406
13	24587	8192	3,001342773
14	49164	16384	3,000732422

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Initialisation : Si $n = 0$: $u_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : Montrons pour tout entier n que si $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ alors $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + n + 1 - 2$.

$u_{n+1} = 2u_n - n + 2$ or $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ donc $u_{n+1} = 2(3 \times 2^n + n - 2) - n + 2$

$u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 2$

$u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + n - 2 = 3 \times 2^{n+1} + n + 1 - 2$. La propriété est héréditaire.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n, $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ donc la suite (u_n) est croissante : somme de deux suites croissantes : 3×2^n et $n - 2$

$u_{18} = 786\,448$ et $u_{19} = 1\,572\,881$ donc si $n \geq 19$, $u_n \geq u_{19} \geq 1\,000\,000$

Le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million est 19.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

1. $w_n = \dfrac{u_n}{v_n} = 3 + \dfrac{n-2}{2^n}$ donc $w_{n+1} - w_n = \dfrac{n+1-2}{2^{n+1}} - \dfrac{n-2}{2^n} = \dfrac{n+1-2}{2^{n+1}} - \dfrac{2(n-2)}{2^{n+1}} = \dfrac{3-n}{2^{n+1}}$ donc si $n \geq 3$, $w_{n+1} - w_n < 0$ donc

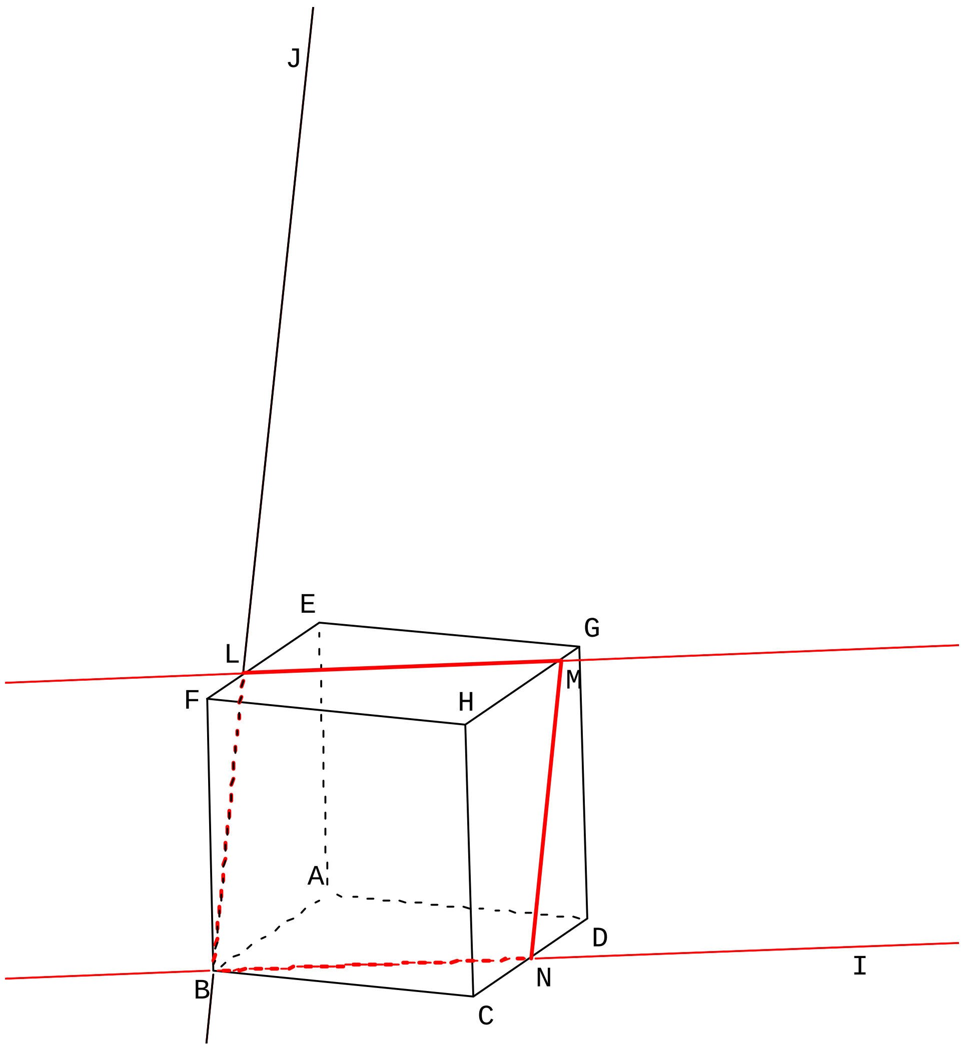
la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. $0 < \dfrac{n}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$, de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{2^n} = 0$.

$\dfrac{u_n}{v_n} = 3 + \dfrac{n}{2^n} - \dfrac{2}{2^n}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 3$.

EXERCICE 5 (3 points) Commun à tous les candidats

Les points B (1 ; 0 ; 0) I (0 ; 2 ; 0) et J (0 ; 0 ; 3) appartiennent au plan P.



La droite (BI) est une droite du plan (ABC) elle coupe (CD) en N

La droite (BJ) est une droite du plan (ABE) elle coupe (EF) en L

Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles, le plan P les coupe suivant deux droites parallèles

L appartient à ces deux plans donc le plan P coupe le plan (EFG) suivant une droite parallèle à (BN) passant par L.

Cette droite coupe (GH) en M.

La section du cube par le plan P est donc le quadrilatère BLMN.

EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Conjectures

1. Formule entrée en cellule B3 : $\boxed{= 2 * B2 + 3\ C2}$ Formule entrée en cellule C3 : $\boxed{= 2 * B2 + C2}$

2. PGCD (u_n ; v_n) = 1

3. La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1,5.

	A	B	C	D
	rang n	terme u_n	terme v_n	terme u_n / v_n
9	8	78643	52429	1,499990463
10	9	314573	209715	1,500002384
11	10	1258291	838861	1,499999404
12	11	5033165	3355443	1,500000149
13	12	20132659	13421773	1,499999963
14	13	80530637	53687091	1,500000009
15	14	322122547	214748365	1,499999998
16	15	1288490189	858993459	1,500000001

Partie B : Étude arithmétique

1. Initialisation : Si $n = 0$: $2\,u_0 - 3\,v_0 = -1$ et $(-1)^{0+1} = -1$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
Hérédité : Montrons pour tout entier n que si $2\,u_n - 3\,v_n = (-1)^{n+1}$ alors $2\,u_{n+1} - 3\,v_{n+1} = (-1)^{n+1+1}$.
$2\,u_{n+1} - 3\,v_{n+1} = 2\,(2\,u_n + 3\,v_n) - 3\,(2\,u_n + v_n) = -2\,u_n + 3\,v_n = -(2\,u_n - 3\,v_n) = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1+1}$.
La propriété est héréditaire. La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n, $2\,u_n - 3\,v_n = (-1)^{n+1}$

2. Pour tout entier n, $2\,u_n - 3\,v_n = (-1)^{n+1}$. On a donc soit $3\,u_n - 3\,v_n = 1$ soit $2\,u_n - 3\,v_n = -1$ ou encore $-2\,u_n + 3\,v_n = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, u_n et v_n sont premiers entre eux, PGCD (u_n ; v_n) = 1

Partie C : Étude matricielle

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u \\ v_n \end{pmatrix}$,
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3\times 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$

1. *a.* $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\times 1 - 3\times(-3) & 2\times 3 - 3\times 2 \\ 1-1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

b. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = Q_n\,P^{-1}\,X_0$.

$$P^{-1}X_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q_n\,P^{-1}X_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (-1)^n & 3\times 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n+1} + 3\times 2^{2n+1}}{5} \\ \dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

donc, pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + 3\times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{(-1)^{n+1} + 3\times 2^{2n+1}}{(-1)^n + 2\times 2^{2n+1}} = \dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{2n+1}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{3}{2}$.