Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on appelle A le point d'affixe 1 et **C** le cercle de centre A et de rayon 1.

La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique. Partie A

Partie A

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$, où z est un nombre complexe.

On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes C.

2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle **C**.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{2z-1}{2z-2}$.

1. Placer le point A et tracer le cercle **C** sur une figure que l'on complètera au furet à mesure.

2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a : $(z' - 1)(z - 1) = \dfrac{1}{2}$.

3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a :

- $AM \times AM' = \dfrac{1}{2}$
- $M' \neq A$;
- $(\vec{u} ; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

4. On considère le point P d'affixe $z_P = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.

5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P ', image de P par f, et réaliser cette construction.

6. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans 1'évaluation.*

Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x = \dfrac{3}{4}$. Soit M' son image par f.

a. Montrer que le point M ' appartient au cercle **C** ' de centre O de rayon 1.

b. Tout point de **C** ' a-t-il un antécédent par f ?

CORRECTION

Partie A

1. $z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1 = (z-1)^2 - i^2 = (z - 1 - i)(z - 1 + i)$

$z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z - 1 - i)(z - 1 + i) = 0 \Leftrightarrow z - 1 - i = 0$ ou $z - 1 + i = 0$

donc l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$, admet pour solutions :

$$z_1 = 1 + i \text{ et } z_2 = 1 - i$$

2. $AM_1 = |z_1 - 1| = |i| = 1$

$AM_2 = |z_1 - 1| = |-i| = 1$ donc M_1 et M_2 appartiennent au cercle **C**.

Partie B

2. pour tout complexe z distinct de 1 on a : $z' - 1 = \dfrac{2z-1}{2z-2} - 1$

$z' - 1 = \dfrac{2z - 1 - (2z - 2)}{2z-2} \Leftrightarrow z' - 1 = \dfrac{2z - 1 - 2z + 2}{2(z-1)}$

$\Leftrightarrow z' - 1 = \dfrac{1}{2(z-1)} \Leftrightarrow (z' - 1)(z - 1) = \dfrac{1}{2}$.

3. $(z' - 1)(z - 1) = \dfrac{1}{2}$ donc pour tout point M distinct de A on a : $z \neq 1$ alors $z' \neq 1$ donc $M' \neq A$

$|z' - 1| \times |z' - 1| = \dfrac{1}{2}$, et $\arg (z' - 1)(z' - 1) = \arg \dfrac{1}{2} + 2k\pi$

soit $AM' \times AM = \dfrac{1}{2}$ et $\arg (z' - 1) + \arg (z' - 1) = 0 + 2k\pi$

donc $AM' \times AM = \dfrac{1}{2}$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

4. $z_P - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $|z_P - 1| = 1$ donc P appartient au cercle de centre A de rayon 1 et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AP}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Pour construire P : construisons la demi-droite d'origine A parallèle à la première bissectrice, ensemble des points M tels que $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ le point P est l'intersection de cette demi-droite et du cercle C.

5. $AP' \times AP = \frac{1}{2}$ donc $AP' = \frac{1}{2}$, P' appartient au cercle de centre A de rayon $\frac{1}{2}$,

$(\vec{u}\,;\overrightarrow{AP}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AP'}) = 0 + 2k\pi$ donc $\frac{\pi}{4} + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AP'}) = 0 + 2k\pi$,

$(\vec{u}\,;\overrightarrow{AP'}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Pour construire le point P', construisons le point P_1 symétrique de P par rapport à l'axe des réels, alors $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AP_1}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, donc P' est le point d'intersection du cercle de centre A de rayon $\frac{1}{2}$, et de la demi-droite $[AP_1)$

6. *a.* M appartient à la droite **D** d'équation $x = \frac{3}{4}$ donc a une affixe de la forme $\frac{3}{4} + i\,y$ où y est un réel

$$z' = \frac{\frac{3}{2} + 2\,i\,y - 1}{\frac{3}{2} + 2\,i\,y - 2} \Leftrightarrow z' = \frac{0{,}5 + 2\,i\,y}{-0{,}5 + 2\,i\,y} \Leftrightarrow z' = -\frac{0{,}5 + 2\,i\,y}{0{,}5 - 2\,i\,y}$$

0,5 + 2 i y et 0,5 – 2 i y sont deux complexes conjugués donc ont le même module, comme $|z'| = \left| -\frac{0{,}5 + 2\,i\,y}{-0{,}5 + 2\,i\,y} \right| = \frac{|0{,}5 + 2\,i\,y|}{|-0{,}5 + 2\,i\,y|}$ alors $|z'| = 1$.

Le point M ' appartient au cercle **C** ' de centre O de rayon 1.

b. Soit un point M' sur le cercle **C** ' de centre O de rayon 1. M' est-il l'image d'un point M par f ? Existe-t-il z tel que $z' = \frac{2z - 1}{2z - 2}$?

Si z existe alors $(z' - 1)(z - 1) = \frac{1}{2}$, donc pour que z existe, il faut que $z' \neq 1$ alors $z - 1 = \frac{1}{2(z' - 1)}$.

Le point A d'affixe 1 appartient au cercle **C** ' et n'a pas d'antécédent par f. Tout autre point de **C** ' admet un seul antécédent par f.

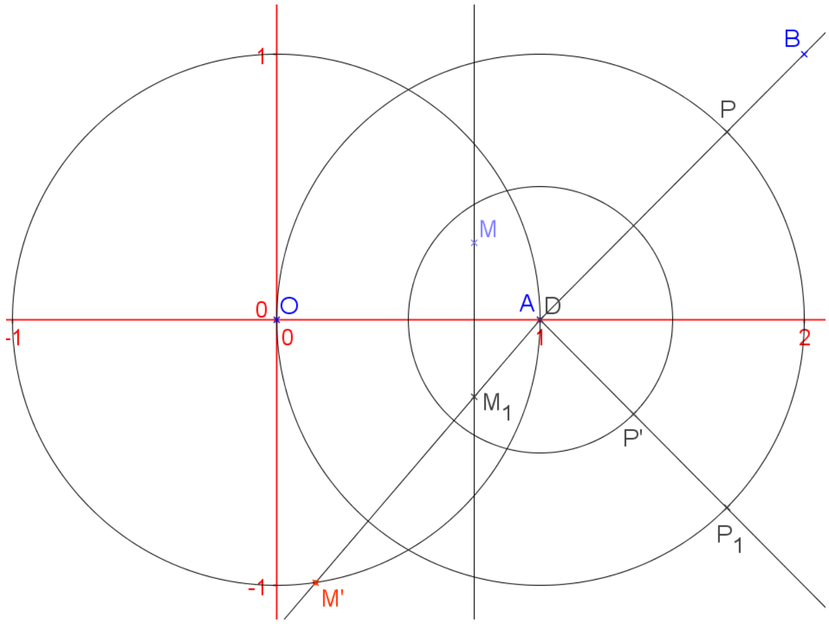
Prolongement :

Il est possible de construire M' si M appartient à la droite **D** :

Pour tout point M ≠ A, $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi$

Il suffit donc de construire le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées, alors $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AM_1}) = 0 + 2k\pi$

Les points A, M_1 et M' sont alignés et M' appartient à la demi-droite $[AM_1)$ de plus M ' appartient au cercle **C** ' de centre O de rayon 1 donc M' est le point d'intersection de la demi-droite $[M_1)$ et du cercle **C** '.



B
P
M
0
O
A
D
-1
0
1
2
1
M_1
P'
P_1
-1
M'