Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun deux sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième.
On note A_1 l'événement : " les deux sujets obtenus par le premier candidats proviennent du même examinateur" et A_2 l'événement : " les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ".
On note $\overline{A}$ l'événement complémentaire de A.

Montrez que la probabilité de A_1 est $\frac{1}{19}$.

a) Calculez directement la probabilité : $p(A_2/A_1)$
b) Montrez que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\frac{1}{323}$.

a) Calculez $p(A_2/\overline{A}_1)$

b) Calculez $p(A_2)$ puis montrez que $p(A_1 \cup A_2) = \frac{33}{323}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. X prend donc les valeurs 0, 1 et 2.
a) Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X
b) Calculez l'espérance mathématiques de X

CORRECTION

1) *a.* parmi les 20 possibles ; le candidat a donc $C_{20}^{2} = 190$ choix possibles.

Comme il a exactement 10 choix pour 2 sujets venant du même examinateur, on a bien : $p(A) = \frac{1}{19}$

b) Si le premier candidat a choisi 2 sujets venant du même examinateur, alors il reste au deuxième candidat 18 sujets. Il a alors $C_{18}^{2} = 153$ choix. Il a exactement 9 choix de 2 sujets venant du même examinateur donc la probabilité qu'à le deuxième candidat de choisir 2 sujets venant du même examinateur sachant que le premier candidat a fait de même est : $p(A_2 / A_1) = \frac{9}{323} = \frac{1}{17}$

c) D'après le principe des probabilités conditionnelles : $p(A_1 \cap A_2) = p(A_2/ A_1) \times p(A_1) = \frac{1}{19} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{323}$

2) *a.* Si le premier candidat n'a pas tiré deux sujets venant du même examinateur, le second candidat a toujours C_{18}^{2} choix pour les deux sujets, mais il n'a que 8 choix pour avoir deux sujets du même examinateur. Donc: $p(A_2 / \overline{A}_1) = \frac{8}{153}$

b. D'après la loi des Probabilités Totales : $p(A_2) = p(A_2/ A_1) \times p(A_1) + p(A_2 / \overline{A}_1)\, p(\overline{A}_1)$
$p(A_2) = p(A_2/ A_1) \times p(A_1) + p(A_2 / \overline{A}_1)\,(1 - p(A_1))$ d'où : $p(A_2) = \frac{1}{17} \times \frac{1}{19} + \frac{8}{153} \times \frac{18}{19} = \frac{1}{19}$
En utilisant alors la relation :
$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)$, on obtient bien après un simple calcul : $p(A_1 \cup A_2) = \frac{33}{323}$
Remarquons que l'on peut alors former le tableau suivant qui résume les probabilités calculées et qui permet de déduire celles qui manque :

	A_1	$\overline{A}_1$	Total
A_2	$\frac{1}{323}$	$\frac{16}{323}$	$\frac{1}{19}$
$\overline{A}_2$	$\frac{16}{323}$	$\frac{290}{323}$	$\frac{18}{19}$
Total	$\frac{1}{19}$	$\frac{18}{19}$	1

3) *a.* D'après les questions précédentes, on a : $p(X = 2) = p(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{323}$

$p(X = 1) = p(A_1 / \overline{A}_2) + p(\overline{A}_1 / A_2) = [1 - p(A_2 / A_1)]\, p(A_1) + p(A_2 / \overline{A}_1)\, p(\overline{A}_1) = \frac{32}{323}$

$p(X = 0) = 1 - p(X = 1) - p(X = 2) = \frac{290}{323}$

b. $E[X] = \frac{34}{323}$