Dans un repère orthonormé du plan $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, considérons une droite Δ passant par deux points distincts A et B.
C est un point quelconque du plan. Notons H le projeté orthogonal du point C sur la droite Δ. La distance CH est alors la distance du point C à la droite Δ, que l'on note d (C, Δ).

La matrice de Gram associée aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $G = \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} \end{pmatrix}$.

Soit M une matrice carrée d'ordre 2 : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On rappelle qu'on appelle déterminant de la matrice M le nombre : det (M) = $a\,d - b\,c$.

1. En utilisant la projection orthogonale, démontrer que : $d\,(C, \Delta) = \dfrac{\text{dét}\,(G)}{AB^2}$.

2. On considère la droite Δ' d'équation $y = 2\,x + 3$ et le point C (3 ; 6)

a. Démontrer que A (0 ; 3) et B (2 ; 7) sont deux points de la droite Δ'

b. Tracer la droite Δ' dans un repère

c. Calculer les coefficients de la matrice de Gram associée aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

d. En déduire la distance du point C à la droite Δ'.

CORRECTION

C est un point quelconque du plan. Notons H le projeté orthogonal du point C sur la droite Δ. La distance CH est alors la distance du point C à la droite Δ, que l'on note d(C, Δ).

La matrice de Gram associée aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $G = \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} \end{pmatrix}$.

1. $G = \begin{pmatrix} AB^2 & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} & AC^2 \end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}$

Les droites (AB) et (HC) sont perpendiculaires donc, $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

det (G) = $AB^2 \times AC^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH})^2$

Les points A, B, H sont alignés donc $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH})^2 = AB^2 \times AH^2$

det (G) = $AB^2 \times AC^2 - AB^2 \times AH^2$

det (G) = $AB^2 \times (AC^2 - AH^2)$

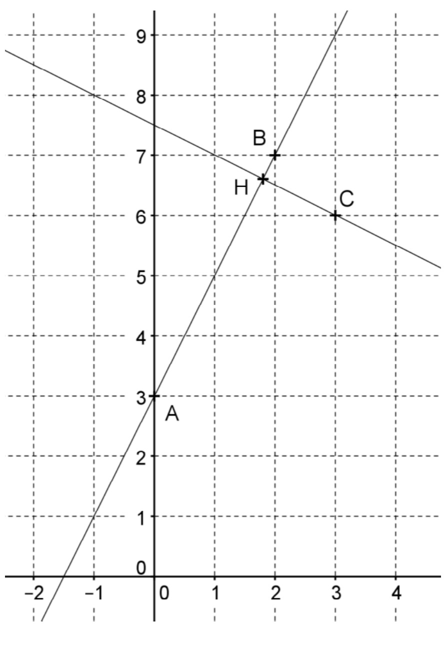
Le triangle ACH est rectangle en H donc $AC^2 = AH^2 + HC^2$ (théorème de Pythagore) donc $AC^2 - AH^2 = HC^2$

d'où det (G) = $AB^2 \times HC^2$ donc $HC^2 = \dfrac{\text{dét}\,(G)}{AB^2}$ donc $d\,(C, \Delta) = \dfrac{\sqrt{\text{det}\,(G)}}{AB}$

2. *a*. $2 \times 0 + 3 = 3$ donc $2\,x_A + 3 = y_A$, donc A ∈ Δ'

$2 \times 2 + 3 = 7$ donc $2\,x_B + 3 = y_B$, donc B ∈ Δ'

A (0 ; 3) et B (2 ; 7) sont deux points de la droite Δ'.



c. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ et $AC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2 \times 3 + 4 \times 3 = 18$ donc $G = \begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 18 & 18 \end{pmatrix}$.

d. $HC^2 = \dfrac{\text{dét}\,(G)}{AB^2}$ or dét (G) = $20 \times 18 - 18^2 = 36$

$HC^2 = \dfrac{36}{20} = \dfrac{9}{5}$ donc $d\,(C, \Delta') = \sqrt{\dfrac{9}{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.