1. Montrer que pour tout n appartenant à Z : $n^7 \equiv n$ [42]

2. Montrer que pour tout n appartenant à Z : $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1) \equiv 0$ [60]

1. $42 = 2 \times 3 \times 7$, étudions donc la division par 7 puis par 2 puis par 3 de $n^7 - n$

$n^7 - n = n (n^6 - 1) = n (n^3 - 1) (n^3 + 1)$

D'après le petit théorème de Fermat, 7 est un nombre premier donc pour tout n appartenant à Z : $n^7 \equiv n$ [7]

Si n est pair, $n \equiv 0$ [2] donc $n (n^3 - 1) (n^3 + 1) \equiv 0$ [2]

Si n est impair : $n \equiv 1$ [2] donc $n^3 \equiv 1$ [2] donc $n^3 - 1 \equiv 0$ [2] donc $n (n^3 - 1) (n^3 + 1) \equiv 0$ [2]

Dans tous les cas 2 divise $n^7 - n$

7 et 2 divisent $n^7 - n$ et 7 et 2 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 7×2 divise $n^7 - n$

Si $n \equiv 0$ [3] alors $n (n^3 - 1) (n^3 + 1) \equiv 0$ [3]

Si $n \equiv 1$ [3] donc $n^3 \equiv 1$ [3] donc $n^3 - 1 \equiv 0$ [3] alors $n (n^3 - 1) (n^3 + 1) \equiv 0$ [3]

Si $n \equiv 2$ [3] alors $n \equiv - 1$ [3] donc $n^3 \equiv (- 1)^3$ [3] donc $n^3 + 1 \equiv 0$ [3] alors $n (n^3 - 1) (n^3 + 1) \equiv 0$ [3]

Dans tous les cas 3 divise $n^7 - n$

14 et 3 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 14×3 divise $n^7 - n$ soit 42 divise $n^7 - n$ donc pour tout n appartenant à Z : $n^7 \equiv n$ [42]

2. $60 = 4 \times 3 \times 5$ étudions donc la division par 5 puis par 3 puis par 4 de $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1)$

D'après le petit théorème de Fermat, 5 est un nombre premier donc pour tout n appartenant à Z : $n^5 \equiv n$ [5]

or $n^5 - n = n (n^4 - 1) = n (n^2 - 1) (n^2 + 1)$ donc 5 divise $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1)$

D'après le petit théorème de Fermat, 3 est un nombre premier donc pour tout n appartenant à Z : $n^3 \equiv n$ [3]

$n^3 - n = n (n^2 - 1)$ donc 3 divise $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1)$

5 et 3 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 5×3 divise $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1)$ soit 15 divise $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1)$

Soit n un entier relatif quelconque, on a 4 cas :

$n \equiv 0$ [4] donc $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1) \equiv 0$ [4]

$n \equiv 1$ [4] donc $n^2 - 1 \equiv 0$ [4] donc $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1) \equiv 0$ [4]

$n \equiv 2$ [4] donc $n^2 \equiv 4$ [4]soit $n^2 \equiv 0$ [4] donc $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1) \equiv 0$ [4]

$n \equiv 3$ [4] donc $n \equiv - 1$ [4] donc $n^2 \equiv 1$ [4] donc $n^2 - 1 \equiv 0$ [4] donc $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1) \equiv 0$ [4]

dans tous les cas $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1) \equiv 0$ [4] soit 4 divise $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1)$

15 et 4 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 15×4 divise $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1)$

donc 60 divise $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1)$ soit pour tout n de Z, $n^2 (n^2 - 1) (n^2 + 1) \equiv 0$ [60]