Polynésie septembre 2009

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

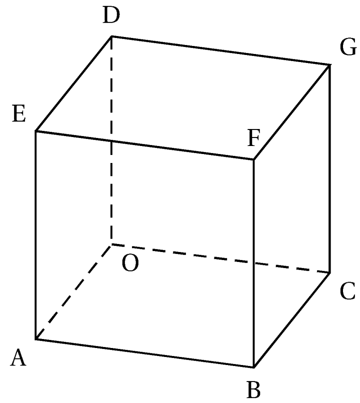
On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.

Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.

Soient les points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\,\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\,\overrightarrow{OC}$.

On appelle R le barycentre des points pondérés (B, – 1) et (F , 2).

L'espace est muni du repère orthonormal $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.



1. *a.* Démontrer que le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).

b. Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

c. Quelle est la nature du triangle PQR ?

2. *a.* Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.

b. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).

3. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).

a. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).

b. Déterminer les coordonnées du point H.

c. Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

Pour chaque question, deux propositions sont énoncées.

Il s'agit de dire, sans le justifier, si chacune d'elles est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la proposition et la mention VRAIE ou FAUSSE.

Pour chaque question, il est compté 1 *point si les deux réponses sont exactes,* 0,5 *point pour une réponse exacte et une absence de réponse et* 0 *point sinon.*

Question a	**Proposition 1**	**Proposition 2**
Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les évènements : A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ; B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».	La probabilité de A est égale à $\frac{3}{7}$.	La probabilité de B est égale à $\frac{1}{7}$.
Question B	**Proposition 3**	**Proposition 4**
Soient A, B et C trois évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité P. On sait que : • A et B sont indépendants ; • $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$; • $P(C) = \frac{1}{2}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{10}$.	$P(B) = \frac{7}{12}$	$P(\overline{A \cup C}) = \frac{2}{5}$. $\overline{A \cup C}$ désigne l'évènement contraire de $A \cup C$.
Question C	**Proposition 5**	**Proposition 6**
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à]0 ; 1[.	Si $P(X = 1) = 8\,P(X = 0)$ alors $p = \frac{2}{3}$	Si $p = \frac{1}{5}$ alors : $P(X = 1) = P(X = 0)$.
Question D	**Proposition 7**	**Proposition 8**
La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}07$ sur $[0\ ;+\infty[$. On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'évènement $(X \le t)$ est donnée par : $P(X \le t) = \int_0^t \lambda\ {}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$ (avec $\lambda = 0{,}07$).	La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.	Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.

EXERCICE 3 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.
On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point M′ = F(M) d'affixe z' définie par : $z' = z + \text{i} - \frac{1}{z}$.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \text{i}$ et $b = e^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A′ et B′ par F d'affixes respectives a' et b'.

a. Calculer a' et b'.

b. Placer les points A, A', B et B'.

c. Démontrer que $\frac{-b}{b'-b} = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$. En déduire la nature du triangle OBB′.

2. On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F, le point O.

a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $z^2 + \text{i}z - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{i}\right)$

b. En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).

c. Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ).

3. Soit θ un réel.

a. Démontrer que si $z = e^{\text{i}\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)\text{i}$.

b. En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M′ appartient au segment [A′C] où C a pour affixe $-\text{i}$.

EXERCICE 4 7 points

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = -nx - x\ln x$.

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes (C_0), (C_1) et (C_2) représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2 sont données en annexe.

On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$.

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.

1. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que pour $x \in]0 ; +\infty[$, $f'_n(x) = -n - 1 - \ln x$ où f'_n désigne la fonction dérivée de f_n.

2. *a.* Démontrer que la courbe (C_n) admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

b. Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.

c. Placer sur la figure en annexe les points A_0, A_1, A_2.

3. *a.* Démontrer que la courbe (C_n) coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}.

b. Démontrer que la tangente à (C_n) au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.

c. Placer sur la figure en annexe les points B_0, B_1, B_2.

Partie C : Calculs d'aires

Pour tout entier naturel n, on considère le domaine du plan D_n délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_n) et les droites d'équation $x = e^{-n-1}$ et $x = e^{-n}$.

On note I_n l'aire en unités d'aires du domaine D_n.

1. Hachurer, sur la figure donnée en annexe, les domaines D_0, D_1, D_2.

2. *a.* À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x \, dx$.

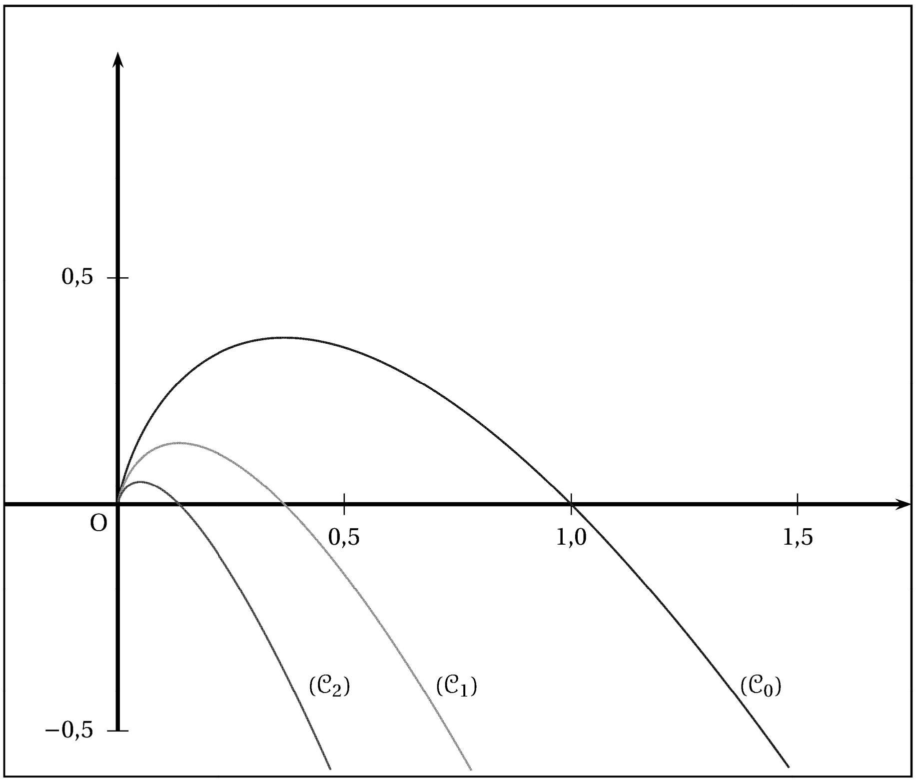
b. En déduire que $I_0 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$.

c. On admet que le domaine D_{n+1} est l'image du domaine D_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{e}$.

Exprimer I_1 et I_2 en fonction de I_0.

Cette page sera complétée et remise à la fin de l'épreuve

Exercice 4



CORRECTION

EXERCICE 1 (4 points)

1. *a.* R est le barycentre des points pondérés (B, – 1) et (F , 2) donc $(-1+2)\overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OF}$
donc $x_R = -x_B + 2x_F$ de même $y_R = -y_B + 2y_F$ et $z_R = -z_B + 2z_F$ donc le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).

b. $\overrightarrow{PR}$ a pour coordonnées (1 – 2 ; 1 ; 2) soit (– 1 ; 1 ; 2)
$\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées (– 2 ; 4 ; 0) soit $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ ne sont pas colinéaires donc les points *P*, Q et R ne sont pas alignés.

c. $PR^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2^2 = 6$; $PQ^2 = (-2)^2 + 4^2 + 0^2 = 20$ et $QR^2 = 1^2 + (1-4)^2 + 2^2 = 14$ donc $PQ^2 = PR^2 + QR^2$
Le triangle PQR est rectangle en R.

2. *a.* Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (4 ; 2 ; 8) alors $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{PR} = 4\times(-1) + 2\times 1 + 1\times 2 = 0$ et $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{PQ} = 4\times(-2) + 2\times 4 + 1\times 0 = 0$
$\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont non colinéaires et tous deux orthogonaux à $\vec{n}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (PQR).
(PQR) *a* une équation de la forme $4x + 2y + z + d = 0$, *P* appartient à ce plan donc $4\times 2 + 2\times 0 + 0 + d = 0$ donc $d = -8$.
Une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.

b. D a pour coordonnées (0 ; 0 ; 1) donc $4\times 0 + 2\times 0 + 1 - 8 \neq 0$ donc le point D n'appartient pas au plan (PQR).

3. *a.* $\overrightarrow{DH}$ est colinéaire à $\vec{n}$ donc pour tout point M de (DH), il existe un réel *k* tel que $\overrightarrow{DM} = k\vec{n}$ donc un système d'équations paramétriques de la droite (DH) est $\begin{cases} x = 4k \\ y = 2k \\ z = k+1 \end{cases}$

b. H a pour coordonnées (4 *k* ; 2 *k* ; *k* + 1)
H appartient au plan (PQR) donc $4\times(4k) + 2\times(2k) + (k+1) - 8 = 0$ donc $21k - 7 = 0$ soit $k = \dfrac{1}{3}$.
Les coordonnées du point H sont $\left(\dfrac{4}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{4}{3}\right)$

c. $\overrightarrow{PH}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3} - 2 ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{4}{3}\right)$ soit $\left(-\dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{4}{3}\right)$. $\overrightarrow{PR}$ a pour coordonnées (– 1 ; 1 ; 2) donc $\overrightarrow{PH} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{PR}$
Le point H appartient à la droite (PR).

EXERCICE 2 (4 points) Commun à tous les candidats
Question A
Proposition 1

On est en situation d'équiprobabilité, le nombre de cas possibles est $\binom{7}{2} = 21$

Si les deux boules tirées sont de la même couleur, c'est que les deux boules choisies sont noires ($\binom{4}{2}$ possibilités) ou rouges ($\binom{3}{2}$ possibilités) donc le nombre de cas favorables est $\binom{4}{2} + \binom{3}{2} = 6 + 3 = 9$ donc $p(\text{A}) = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$ **Proposition 1 VRAIE**

Proposition 2

Si une seule des deux boules tirées est rouge, c'est qu'une des deux boules choisie est rouge et l'autre noire donc le nombre de cas favorables est $4 \times 3 = 12$ donc $p(\text{B}) = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$ **Proposition 2 FAUSSE**.

Question B
Proposition 3

$P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$ or A et B sont indépendants donc $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$ donc
$\dfrac{3}{4} = \dfrac{2}{5} + P(\text{B}) - \dfrac{2}{5}P(\text{B})$ soit $\dfrac{7}{20} = \dfrac{3}{5}P(\text{B})$ donc $P(\text{B}) = \dfrac{7}{12}$ **Proposition 3 VRAIE**

Proposition 4

$P(\text{A} \cup \text{C}) = P(\text{A}) + P(\text{C}) - P(\text{A} \cap \text{C}) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

$P(\overline{\text{A} \cup \text{C}}) = 1 - P(\text{A} \cup \text{C}) = \dfrac{1}{5} \neq \dfrac{2}{5}$. **Proposition 4 FAUSSE**.

Question C
Proposition 5

$P(X = 1) = \binom{4}{1} p \times (1 - p)^3 = 8\,(1 - p)^4$ donc $4\,p = 8\,(1 - p)$ donc $p = \dfrac{1}{2}$ **Proposition 5 FAUSSE**.

Proposition 6

Si $p = \dfrac{1}{5}$ alors $P(X = 1) = \binom{4}{1} \dfrac{1}{5} \times \left(1 - \dfrac{1}{5}\right)^3 = 4 \times \dfrac{1}{5} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^4$

$P(X = 0) = (1 - p)^4 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^4 = P(X = 1)$ donc **Proposition 6 VRAIE**

Question D

La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}07$ sur $[0\,;+\infty[$.
On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'évènement $(X \leq t)$ est donnée par :
$P(X \leq t) = 1 - \text{e}^{-\lambda t} \int_0^t \lambda\ ^{-\lambda x}\,\text{d}x$ (avec $\lambda = 0{,}07$).

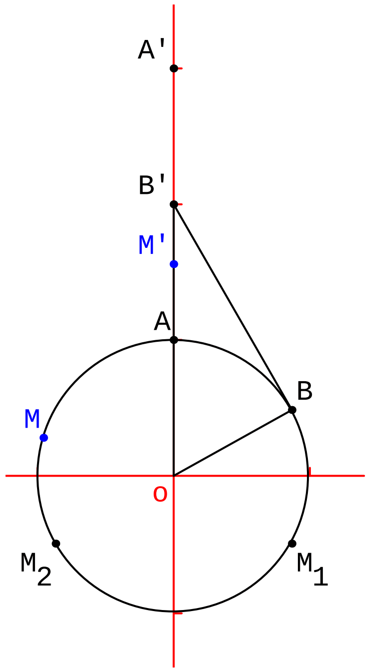
Proposition 7

$P(X \leq t) = 1 - \text{e}^{-\lambda t}$ donc $P(\text{X} > t) = \text{e}^{-\lambda t}$ donc $P(\text{X} > 10) = \text{e}^{-0{,}07 \times 10} = 0{,}4966$ donc la probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près. **Proposition 7 VRAIE**

Proposition 8

La loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc $P(\text{X} > 20 / \text{X} > 10) = P(\text{X} > 20 - 10)$ soit 0,5 à 10^{-2} près.
Proposition 8 VRAIE

EXERCICE 3 (5 points)
Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire



1. *a.* $a' = \mathrm{i} + \mathrm{i} - \frac{1}{\mathrm{i}} = 3\,\mathrm{i}$ et $b' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + \mathrm{i} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2} + \mathrm{i} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\,\mathrm{i}$.

b.

c. $\frac{-b}{b'-b} = \frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{4\,\mathrm{i}-\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \frac{-(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{-(\sqrt{3}-3\,\mathrm{i})} = \frac{-(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{-\sqrt{3}\,(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})} = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

$(\overrightarrow{\mathrm{BB'}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \arg\frac{-b}{b'-b}$ donc $(\overrightarrow{\mathrm{BB'}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ donc le triangle OBB' est rectangle en B

Ce qui pouvait aussi se démontrer en appliquant la réciproque du théorème de Pythagore,
$\mathrm{OB}^2 = |\,b^2\,| = 1$; $\mathrm{OB'}^2 = |\,b'^2\,| = 4$ et $\mathrm{BB'}^2 = |\,b' - b\,|^2 = 3$
donc $\mathrm{BB'}^2 + \mathrm{OB}^2 = \mathrm{OB'}^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OBB' est rectangle en B.

2. *a.* $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \left(z + \frac{1}{2}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\mathrm{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$\left(z + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = z^2 + \mathrm{i}\,z - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = z^2 + \mathrm{i}\,z - 1$

Pour tout nombre complexe z, $z^2 + \mathrm{i}\,z - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

b. M est un point du plan P privé du point O ayant pour image par F, le point O si et seulement si $z' = 0$ soit $z + \mathrm{i} - \frac{1}{z} = 0$

soit $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 0 \Leftrightarrow z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} = 0$ ou $z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} = 0$

donc les affixes des points M_1 et M_2 de l'ensemble (E) sont $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$

c. $|\,z_1\,| = |\,z_2\,| = 1$ donc les points de (E) appartiennent à (Γ).

3. *a.* si $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ alors $\frac{1}{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$ donc $z - \frac{1}{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta} = 2\,\mathrm{i}\sin\theta$ donc $z' = (2\sin\theta + 1)\mathrm{i}$.

b. Si M appartient au cercle (Γ) alors il existe un réel θ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ donc $z' = (2\sin\theta + 1)\mathrm{i}$.
z' est un imaginaire pur et comme $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ alors $-1 \leq 2\sin\theta + 1 \leq 3$ donc M′ appartient au segment [A′C] où C a pour affixe $-\mathrm{i}$.

EXERCICE 4 (7 points)

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur]0 ; + ∞ [par $f_0(x) = -x \ln x$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = -\infty$

2. $f'_0(x) = -\ln x - x \times \dfrac{1}{x} = -(\ln x + 1)$ or $\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{e}$ d'où le sens de variation de f'_0

Sur $\left]0 ; \dfrac{1}{e}\right[$, $f'_0(x) \geq 0$ donc f_0 est croissante sur $\left]0 ; \dfrac{1}{e}\right[$.

Sur $\left[\dfrac{1}{e} ; +\infty\right[$, $f'_0(x) \leq 0$ donc f_0 est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{e} ; +\infty\right[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

1. pour $x \in]0 ; +\infty[$, $f_n(x) = -nx - x\ln x$ donc $f'_n(x) = -n - (\ln x + x \times \dfrac{1}{x})$ soit $f'_n(x) = -n - 1 - \ln x$.

2. *a.* la courbe (C_n) admet en un point une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $f'_n(x) = 0$
$f'_n(x) = -n - 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -n - 1 \Leftrightarrow x = e^{-n-1}$
la courbe (C_n) admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

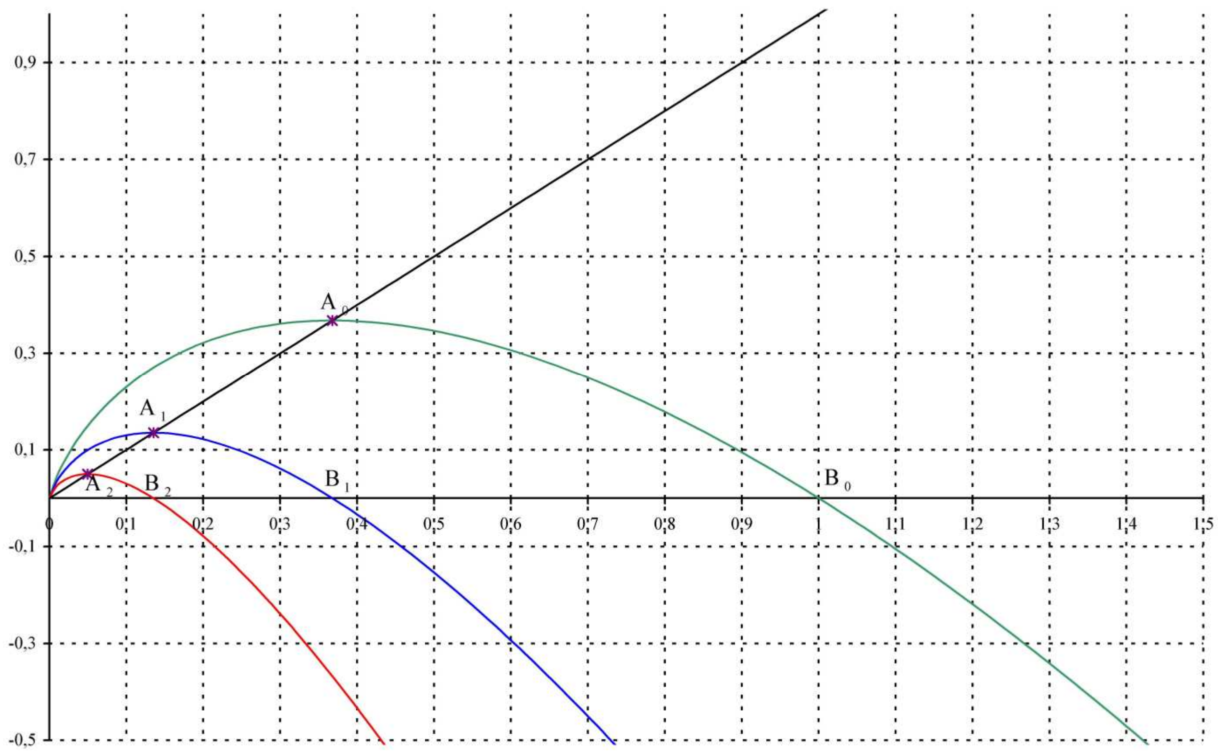
b. L'ordonnée de A_n est $y_n = f_n(e^{-n-1})$ donc $y_n = -n\,e^{-n-1} - e^{-n-1}\ln(e^{-n-1}) = -n\,e^{-n-1} - e^{-n-1}(-n-1)$
$y_n = -n\,e^{-n-1} + n\,e^{-n-1} + e^{-n-1}$ soit $y_n = e^{-n-1} = x_n$ donc le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.

c. Il suffit de tracer la droite d'équation $y = x$, les points d'intersection avec les courbes C_0, C_1 et C_2 sont les points A_0, A_1 et A_2

3. *a.* la courbe (C_n) coupe l'axe des abscisses en point d'abscisse x telle que $f_n(x) = 0$
$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow -nx - x\ln x = 0$ et $x \in]0 ; +\infty[\Leftrightarrow -x(n + \ln x) = 0$ et $x \in]0 ; +\infty[\Leftrightarrow \ln x = -n \Leftrightarrow x = e^{-n}$
la courbe (C_n) coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n d'abscisse e^{-n}.

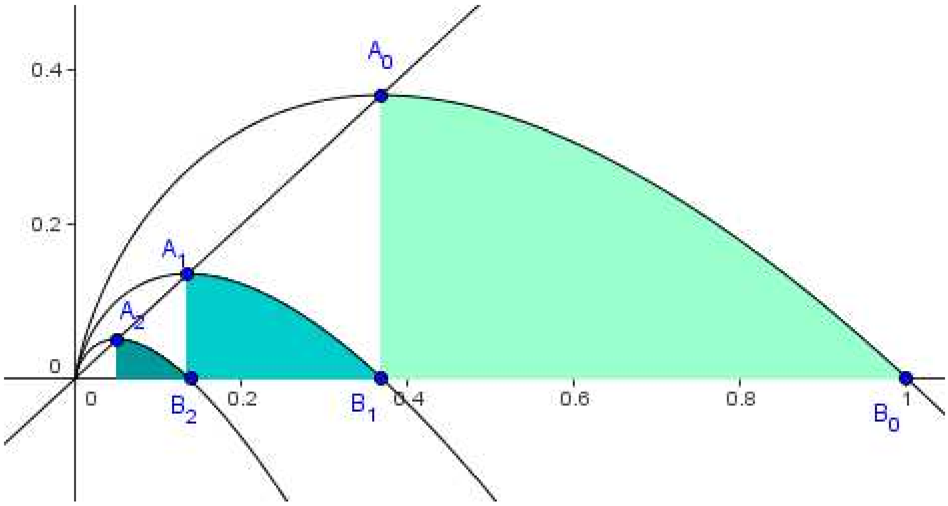
b. la tangente à (C_n) au point B_n a pour coefficient directeur $f'_n(e^{-n})$ or $f'_n(e^{-n}) = -n - 1 - \ln e^{-n} = -n - 1 - (-n) = -1$
la tangente à (C_n) au point B_n *a* un coefficient directeur indépendant de l'entier n.

c.



Partie C : Calculs d'aires

1.



2. *a.* Soit $u'(x)\ x$ alors $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$; soit $v'(x) = \ln x$ alors $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} x \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\,e^2}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x \text{ or } \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln e = -1$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} x \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\,e^2} - \left[\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = \frac{1}{2\,e^2} - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4\,e^2}\right] = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4\,e^2}$$

b. Sur $]\,0\,;\,1]$; $f_0(x) > 0$ donc $I_0 = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} x \ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4\,e^2}$.

c. le domaine D_{n+1} est l'image du domaine D_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{e}$ donc $I_{n+1} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^2 I_n$

$I_1 = \dfrac{1}{e^2} I_0$ et $I_2 = \dfrac{1}{e^2} I_1 = \dfrac{1}{e^4}\ I_0$.