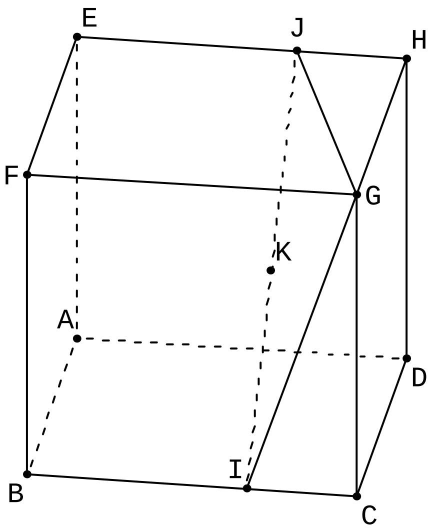
Polynésie septembre 2008

On donne la propriété suivante :« par un point de l'*espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée* »

Sur la figure donnée en annexe, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On a placé : les points I et J tels que $BI = \frac{2}{3} BC$ et $EJ = \frac{2}{3} EH$, le milieu K de [IJ].

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).



Partie A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F. En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.

2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).

4. *a*. Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.

***b*.** En déduire que les points F, P et K sont alignés.

Partie B

L'espace est rapporte au repère orthogonal (A ; AB ; AD ; AE).

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).

On note (x ; y ; 0) les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.

2. *a*. Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).

***b*.** Exprimer les produits scalaires $GN \cdot FI$ et $GN \cdot FJ$ en fonction de x et y.

***c*.** Déterminer les coordonnées du point N.

3. Placer alors le point P sur la figure en annexe.

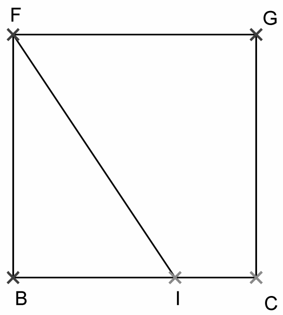
CORRECTION

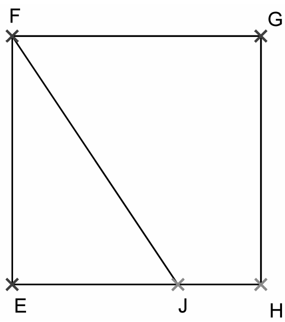
Partie A

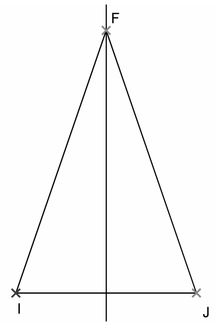
1. La face BCFG du cube est un carré donc le triangle FBI est rectangle en B et $FI^2 = FB^2 + BI^2 = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}$

La face FGHE du cube est un carré donc le triangle FEJ est rectangle en E et $FJ^2 = EF^2 + EJ^2 = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}$

donc FI = FJ, le triangle FIJ est isocèle en F.







Dans le triangle FIJ isocèle en F, K est le milieu de [IJ] donc (FK) est la médiane et donc la hauteur issue de F donc les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

2. la droite (IJ) est orthogonale à (FK) et à (GK), ces deux droites sont sécantes donc (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

3. la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK) donc à la droite (GK),
P est le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) donc la droite (IJ) est orthogonale à (GP)
la droite (IJ) est orthogonale à (GP) et à (GK), ces deux droites sont sécantes donc la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).

4. *a*. La droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK), et est orthogonale au plan (FGP) or par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée donc par F passe un et un seul plan orthogonal à (IJ) donc (FGK) et (DGP) sont confondus, les points F, G, K et P sont coplanaires.

4. *b*. I et J appartiennent au plan (FIJ) donc le milieu K de [IJ] appartient au plan (FIJ).
(FIJ) et (FGK) sont deux plans distincts passant par F donc sont non parallèles donc se coupent suivant une droite
F et K sont deux points des plans (FIJ) et (FGK) donc les plans (FIJ) et (FGK) se coupent suivant la droite (FK).

P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) donc appartient au plan (FIJ)
P est le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) donc (GP) est orthogonale à (IJ) donc est incluse dans le plan (FGK)
P appartient à (FGK) donc à l'intersection des plans (FIJ) et (FGK) donc à la droite (FK).
Les points F, P et K sont alignés.

Partie B

1. $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AE}$ donc F a pour coordonnées (1 ; 0 ; 1)

$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$ donc G a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1)

$\vec{AI} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD}$ donc I a pour coordonnées $\left(1 ; \frac{2}{3} ; 0\right)$

$\vec{AJ} = \frac{2}{3}\vec{AD} + \vec{AE}$ donc J a pour coordonnées $\left(0 ; \frac{2}{3} ; 1\right)$

2. *a.* P est le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) donc (GP) est orthogonale au plan (FIJ) donc (GP) est orthogonale à toute droite de ce plan en particulier à (FI) et (FJ), N est un point de (GP) donc la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).

2. *b.* la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ) donc $\vec{GN} \cdot \vec{FI} = 0$ et $\vec{GN} \cdot \vec{FJ} = 0$

$\vec{GN}$ a pour coordonnées (x – 1 ; y – 1 ; – 1) ; $\vec{FI}$ a pour coordonnées $\left(1-1 ; \frac{2}{3} ; 0-1\right)$ soit $\left(0 ; \frac{2}{3} ; -1\right)$

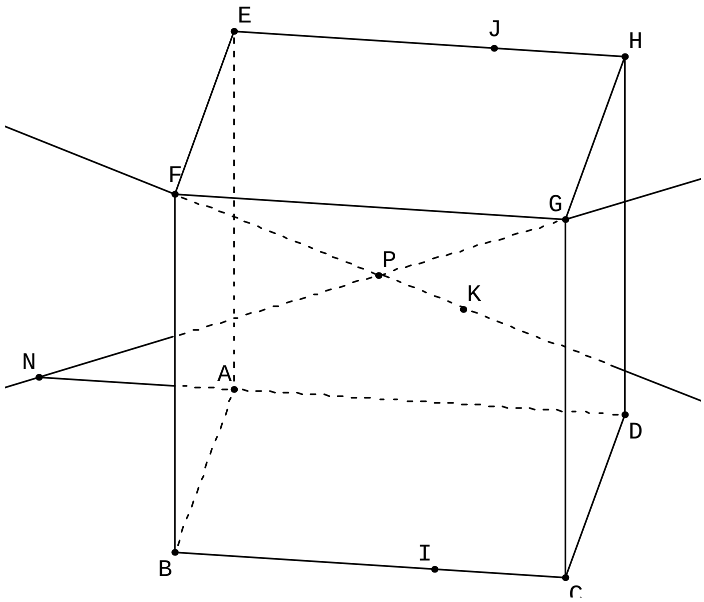
$\vec{FJ}$ a pour coordonnées $\left(0-1 ; \frac{2}{3} ; 1-1\right)$ soit $\left(-1 ; \frac{2}{3} ; 0\right)$

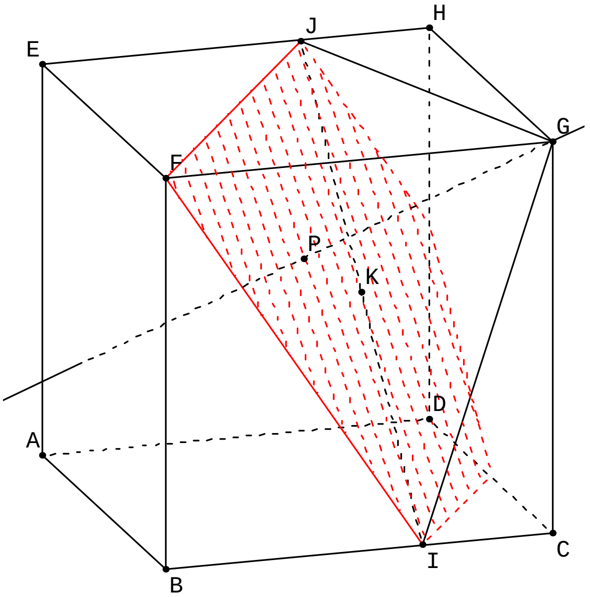
$\vec{GN} \cdot \vec{FI} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}(y-1) - (-1) = 0 \Leftrightarrow 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$

$\vec{GN} \cdot \vec{FJ} = 0 \Leftrightarrow -(x-1) + \frac{2}{3}(y-1) = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

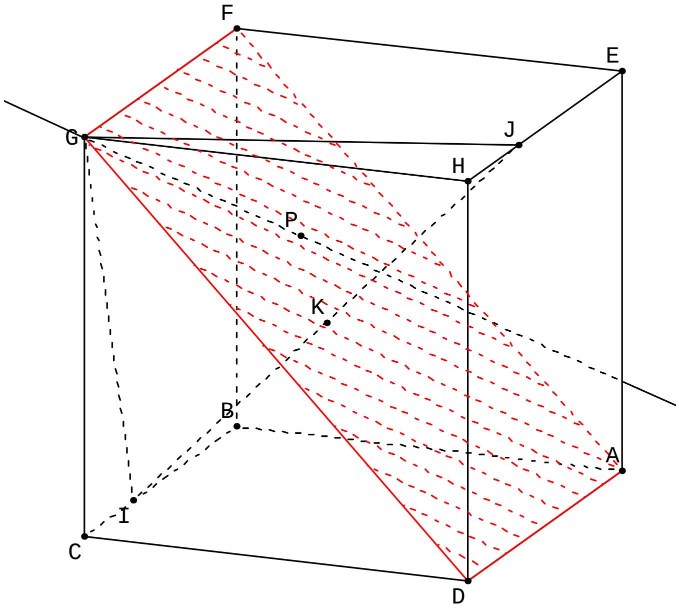
N a pour coordonnées $\left(0 ; \frac{1}{2} ; 0\right)$.

3. Plaçons le point N sur la figure, P est le point d'intersection des droites (FK) et (GN).





P est le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).



En rouge le plan (FGK), (GP) est contenue dans ce plan.