Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_n < v_n$.
2. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes ?
3. Trouver deux réels distincts a_1 et a_2 tels que les suites (S_n) et (T_n) définies pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$S_n = u_n + a_1 v_n \text{ et } T_n = u_n + a_2 v_n$$

soient géométriques.

4. Exprimer S_n et T_n en fonction de n.
5. Déterminer les suites (u_n) et (v_n).

CORRECTION

1. $u_0 = -1$ et $v_0 = 2$ donc $v_0 > u_0$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n la propriété est héréditaire. C'est-à-dire que si $v_n > u_n$ alors : $v_{n+1} > u_{n+1}$

$v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{2(u_n + 4v_n) - 5(u_n + v_n)}{10}$ donc $v_{n+1} - u_{n+1} = 0,3\,(v_n - u_n)$

or $v_n > u_n$ donc $v_n - u_n > 0$ donc $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$ donc $v_{n+1} > u_{n+1}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. D'après la question précédente : $v_{n+1} - u_{n+1} = 0,3\,(v_n - u_n)$

soit $w_n = v_n - u_n$ alors $w_{n+1} = 0,3 w_n$ donc la suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 3$ et de raison $q = 0,3$.

donc $w_n = q^n\, w_0 = 3 \times (0,3)^n$.

Pour montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, il faut montrer que (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et que la limite de $v_n - u_n$ est 0.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$ or pour tout n de IN , $v_n - u_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} - v_n = -\dfrac{1}{5}(v_n - u_n)$ or pour tout n de IN , $v_n - u_n > 0$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$ donc (v_n) est décroissante.

si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ ici $q = 0,3$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3^n = 0$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Les trois conditions sont vérifiées donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Donc ces deux suites convergent vers la même limite L.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_{n+1} = u_{n+1} + a\,v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} + a\,\dfrac{u_n + 4v_n}{5}$ donc $S_{n+1} = \dfrac{(2a+5)u_n + (8a+5)v_n}{10}$

S_n est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que : $S_{n+1} = q\,S_n \Leftrightarrow \dfrac{(2a+5)u_n + (8a+5)v_n}{10} = q\,(u_n + a\,v_n)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2a+5)u_n + (8a+5)v_n}{10} = q\,u_n + a\,q\,v_n$ donc en identifiant, il suffirait que : $2a + 5 = 10q$ et $8a + 5 = 10\,a\,q$

donc $2a^2 + 5a = 10\,a\,q = 8a + 5$ donc a est solution de : $2a^2 - 3a - 5 = 0$

L'équation $2x^2 - 3x - 5 = 0$ admet pour solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = \dfrac{5}{2} = 2,5$ donc on a 2 choix possibles pour a : $a_1 = -1$ et $a_2 = 2,5$

<u>Vérification :</u>

Soit $S_n = u_n - v_n$ et $T_n = u_n + 2,5\,v_n$. Vérifions que ces deux suites sont bien géométriques :

$S_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{u_n + 4v_n}{5} = \dfrac{3u_n - 3v_n}{10}$ donc $S_{n+1} = 0,3\,(u_n - v_n) = 0,3\,S_n$

donc S_n est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $S_0 = u_0 - v_0 = -3$ donc $S_n = -3 \times 0,3^n$

$T_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} + 2,5\,\dfrac{u_n + 4v_n}{5} = \dfrac{5u_n + 5v_n + 5u_n + 5v_n}{10} = u_n + v_n$ donc $T_{n+1} = T_n$ donc T_n est une suite constante

$T_0 = u_0 + 2,5\,v_0 = -1 + 5 = 4$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $T_n = 4$

4. $S_n = -3 \times 0,3^n$ et $T_n = 4$ donc il faut résoudre le système $u_n - v_n = -3 \times 0,3^n$ et $u_n + 2,5\,v_n = 4$

en soustrayant membre à membre : $-(u_n - v_n) + u_n + 2,5\,v_n = 3 \times 0,3^n + 4$ donc $3,5\,v_n = 4 + 3 \times 0,3^n$ soit $v_n = \dfrac{4 + 3 \times 0,3^n}{3,5}$

$2,5\,(u_n - v_n) + u_n + 2,5\,v_n = 2,5 \times 3 \times 0,3^n + 4$ donc $3,5\,u_n = 7,5 \times 0,3^n + 4$ donc $u_n = \dfrac{8 + 7,5 \times 0,3^n}{3,5}$