On étudie une population de noyaux radioactifs au cours du temps. L'instant $t = 0$ est celui du début de l'observation, il y a alors N_0 noyaux.

La loi de désintégration radioactive donne $N(t) = N_0\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{k}}$ où k est une constante positive, appelée constante du temps et caractéristique de l'isotope.

Propriété : pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution que l'on note $\ln(a)$.

Partie A

1. Le carbone 14 contenu dans les espèces vivantes se désintègre après leur mort et diminue de moitié en environ 5740 ans. Calculer k pour le carbone 14.
2. On a daté des fragments de bois qui ne contiennent plus que le dixième de la masse de carbone 14 obtenue dans les témoins actuels. Quelle datation peut-on faire de ces fragments de bois ?
3. On a trouvé en 2006 dans un site archéologique des ossements humains dont la teneur en carbone 14 est égale à 35 % de celles des os d'un être humain en vie. Déterminer la date de la mort de cet humain.

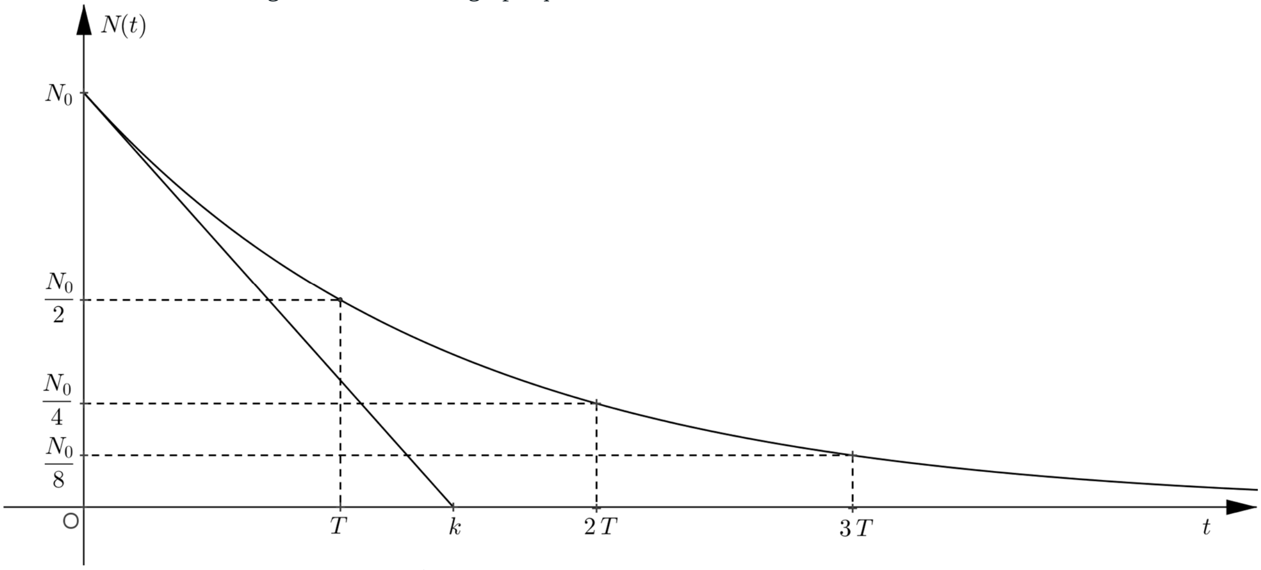
Partie B

1. Etudier les variations de la fonction N sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$
2. Déterminer la valeur de T (en fonction de k) telle que : $\mathrm{e}^{-\frac{T}{k}} = \frac{1}{2}$.

Quelle est la population à cet instant T appelée demi-vie?

3. *a.* Justifier que pour n entier $n \geq 1$, $\mathrm{e}^{-\frac{nT}{k}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. Justifier les images données sur le graphique ci-dessous.



c. Quelle conjecture semble vérifier la constante k ? La prouver.

d. Vérifier qu'au bout d'une durée de 5 k, plus de 99 % des noyaux présents à l'instant $t = 0$ sont désintégrés.

CORRECTION

Partie A

1. Le carbone 14 contenu dans les espèces vivantes se désintègre après leur mort et diminue de moitié en environ 5740 ans.

$N(5740) = 0{,}5\ N_0$ donc $N_0\ \mathrm{e}^{-\frac{5740}{k}} = 0{,}5\ N_0$, $N_0 \neq 0$ donc $\mathrm{e}^{-\frac{5740}{k}} = 0{,}5$

$-\frac{5740}{k} = \ln 0{,}5 \Leftrightarrow k = \frac{-5740}{\ln 0{,}5}$ or $\ln 0{,}5 = -\ln 2$ donc $\Leftrightarrow k = \frac{5740}{\ln 2}$

2. Des fragments de bois ne contiennent plus que le dixième de la masse de carbone 14 obtenue dans les témoins actuels donc

$N(t) = N_0\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{k}} = 0{,}1\ N_0$ soit $\mathrm{e}^{-\frac{t}{k}} = 0{,}1$

$-\frac{t}{k} = \ln 0{,}1 \Leftrightarrow t = -k \ln 0{,}1 = -\frac{5740}{\ln 2} \ln 0{,}1 \Leftrightarrow t \approx 19\,067$ ans.

3. $N(t) = N_0\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{k}} = 0{,}35\ N_0$ soit $\mathrm{e}^{-\frac{t}{k}} = 0{,}35$

$-\frac{t}{k} = \ln 0{,}35 \Leftrightarrow t = -k \ln 0{,}35 = -\frac{5740}{\ln 2} \ln 0{,}35 \Leftrightarrow t \approx 8\,693$ ans.

La date de la mort de cet humain est donc 2006 – 8693 = – 6 687 soit 6 687 avant notre ère

Partie B

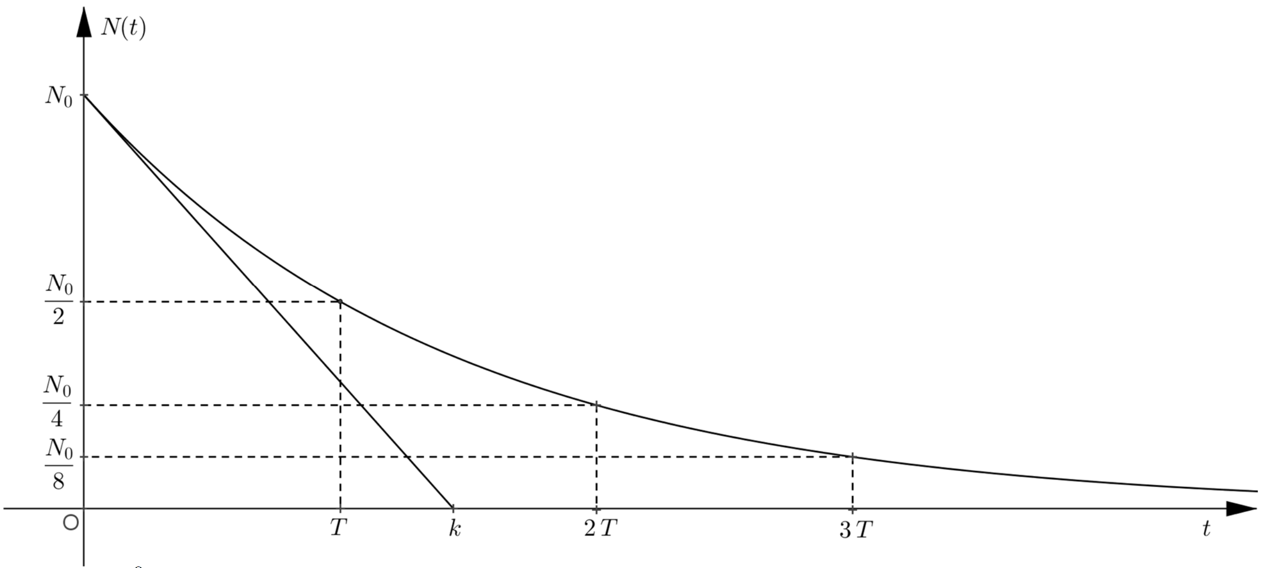
1. $N(t) = N_0\ e^{-\frac{t}{k}}$ donc N est une fonction définie, continue dérivable sur [0 ; + ∞ [et $N'(t) = N_0 \left(-\frac{1}{k} \right) e^{-\frac{t}{k}}$.

$N_0 > 0$ et $k > 0$ donc $N'(t) < 0$ sur [0 ; + ∞ [.
N est strictement décroissante sur [0 ; + ∞ [.

2. $e^{-\frac{T}{k}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{T}{k} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{T}{k} = \ln 2 \Leftrightarrow \mathrm{T} = k \ln 2$ donc $N(\mathrm{T}) = N_0\ e^{-\frac{\mathrm{T}}{k}} = \frac{1}{2} N_0$.

3. *a.* $e^{-\frac{T}{k}} = \frac{1}{2}$ donc, pour n entier $n \geq 1$, $\left(e^{-\frac{T}{k}} \right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ soit $e^{-\frac{nT}{k}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b.



$N(0) = N_0\ e^0 = N_0$

$N(n\ \mathrm{T}) = N_0\ e^{-\frac{nT}{k}}$ or pour n entier $n \geq 1$, $e^{-\frac{nT}{k}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $N(n\ \mathrm{T}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n N_0 = \frac{N_0}{2^n}$ donc :

$N(\mathrm{T}) = \frac{N_0}{2^1} = \frac{N_0}{2}$ et $N(2\ \mathrm{T}) = \frac{N_0}{2^2} = \frac{N_0}{4}$ et $N(3\ \mathrm{T}) = \frac{N_0}{2^3} = \frac{N_0}{8}$.

c. k semble être l'abscisse du point d'intersection de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe.
La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = N'0)\ (t - 0) + N(0)$

$N'0) = N_0 \left(-\frac{1}{k} \right) e^{-\frac{0}{k}} = -\frac{N_0}{k}$ donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -\frac{N_0}{k} t + N_0$ soit $y = \frac{N_0}{k}(-t + k)$

Cette droite coupe l'axe des abscisses en un point tel que $\frac{N_0}{k}(-t + k) = 0$ donc quand $t = k$.

k est l'abscisse du point d'intersection de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe.

d. $N(5\ k) = N_0\ e^{-\frac{5k}{k}} = N_0\ e^{-5}$ or $e^{-5} \approx 0{,}007$ donc $N(5\ k) \approx 0{,}007\ N_0$ donc au bout d'une durée de 5 k, 99,3 % des noyaux présents à l'instant $t = 0$ sont désintégrés soit plus de 99 % des noyaux présents à l'instant $t = 0$ sont désintégrés.