

Forme d'équilibre d'une branche d'arbre

Bernard SCHAEFFER

Résumé – Dans cette Note, on présente un calcul de la forme des branches d'arbre à l'aide de la théorie de la flexion des poutres. Le calcul numérique a été effectué en grands déplacements et en faisant intervenir le phénomène de croissance. Le couplage entre la flexion élastique et la croissance fait prendre à la branche une forme infléchie associée à une déformation permanente.

Equilibrium shape of a tree branch

Abstract – The shape of tree branches is computed using the theory of flexure of beams. Numerical computation is used and takes into account large displacements and growth. The coupling between elastic bending and growth results in a branch shape having an inflection point connected with a permanent deformation.

Abridged English Version – The study of stresses in living materials has been the subject of many papers. For example the stresses due to anisotropic growth [1], influence of stresses on growth [2], and even viscoelasticity [3] or plasticity. The influence of gravity on growth is known under the names of gravimorphism [4] or geotropism [5]. The proportions of trees have been found to be limited by elastic criteria to stand under their own weight [6]. Growth stresses and particularly those due to reaction wood play an important role in the mechanics of trees [8], but this paper is focused essentially on the physical influence of gravity. Growth stresses are predominant in the trunk of a vertical tree, where gravitational forces creating nearly hydrostatic pressures may be neglected [8]. In branches, where bending is dominant, stresses due to gravitational forces are much larger than in the trunk. In this paper, growth stresses will be considered as a distinct phenomenon that will not be taken into account in a first approximation.

A forest tree that has been shifted from its normal upright position during a storm will probably grow straight again. Reaction wood may force the tree to an upright position again, but bending strain was not found to affect radial xylem growth in Douglas-fir [5]. Old branches have an inflection point and if their curvature remains almost unchanged when cut, their deformation is permanent. It is often not possible to straighten these branches without breaking them.

In the absence of gravity a branch would probably grow straight in the direction of light. With growth rings of constant thickness and a constant yearly increase in length, the shape of a branch would be a cone. Trees may be considered as structures made of beams (dead branches) subjected to gravity. Classical Strength of Materials considers a beam with a given shape, applies a load and calculates the resulting shape, slightly different from the original one for thick beams. Thin beams may have large deflections resulting in non-linear displacement, though still elastic. To apply elasticity to a tree branch, it is necessary to know its shape before any calculation. The theory shows that the curvature of the bent beam has a constant sign; there is no inflection point. Elasticity is adequate to calculate the deflection of a branch when the changes in thickness and length are negligible as for a branch temporarily loaded with snow or fruits.

When the load is permanent, viscous or plastic deformation may occur, but the coupling between the simultaneous increase of the load and the thickening of the branch is more

Note présentée par Michel THELLIER.

important. A branch bends continuously with time, even if it thickens. Even with a constant load there would be no decrease of the deflection when the branch thickens. On the contrary, a decrease of the thickness of the branch, would also increase the deflection. The process of growth being time-dependent, the shape of a branch is a function of time. Dividing time into infinitely small intervals, it is possible to divide each time step in a few more steps: growth, loading and bending. Growth produces an increase in length and thickness of the branch and therefore a small change in geometry. Using the new geometry, the increase in load being small, linear elasticity may be used to compute the deflection, giving another change in geometry of the branch. The growth cycle may then be repeated for the next time step and so on. Because of the changes in thickness and length, the principle of superposition does not apply directly. Therefore, the stress distribution through the branch is no more linear and a permanent deformation occurs even if the incremental stress distribution is linear.

Many methods have been devised by engineers to analyse the mechanical behaviour of structures. Numerous configurations have been solved with analytical formulae, but they are valid only for simple geometries. With the advent of computers, numerical methods, such as finite elements and finite differences have been developed to calculate complicated structures. None of them (at our knowledge), takes into account the growth phenomenon (occurring in the same manner in the construction of buildings as for trees). In order to calculate the shape of a branch, a simple finite difference method has been used to integrate the differential equation of flexure step by step along the branch and iterated in a time marching process. At each time step, thickness, length and deflection of the branch are adjusted to take care of growth. Few input data are necessary: the thickness of the annual growth rings, the annual length increase of the branches, the growth angle, the density, the longitudinal elastic modulus of wood and the acceleration of gravity.

The results are synthesised in a picture of the whole tree: the young branches are at the top, almost straight and pointing in the direction of growth (*Figs. 1 to 4*). The old branches, at the bottom of the tree, are curved and deflected towards the bottom. Figures 1 to 3 show the influence of the growth angle. Figure 4 differs from Figure 3 only by the growth speed: bending is more pronounced for large trees than for small ones. The shapes of the branches are characterised by an inflection point, not predictable with the elastic criteria of MacMahon [6].

1. INTRODUCTION. — L'étude des contraintes dans les matériaux vivants a fait l'objet d'un certain nombre de publications : contraintes dues à l'anisotropie de la croissance [1], influence des contraintes sur la croissance [2] et même viscoélasticité [3] ou plasticité. L'influence de la pesanteur sur la croissance est connue sous les noms de gravimorphisme [4] ou géotropisme [5]. La forme des arbres doit satisfaire à des critères élastiques pour résister à leur propre poids [6]. Les contraintes de croissance et en particulier celles créées par le bois de réaction jouent un rôle important ([7], [8]). Cependant nous nous limiterons ici à décrire une branche comme un corps élastique pesant ayant une croissance anisotrope, dans une direction fixe.

2. APPLICATION AUX BRANCHES DE LA THÉORIE DE LA FLEXION DES POUTRES. — Les efforts que doivent supporter les branches d'un arbre sont essentiellement des efforts de flexion dus à leur poids propre. La première idée qui vient à l'esprit est de leur appliquer la théorie de la flexion des poutres.

Le modèle proposé est basé sur un certain nombre d'hypothèses physiques et biologiques. Le matériau constituant la branche est élastique linéaire, ses propriétés physiques (densité et module) sont constantes et uniformes. Le bois neuf est libre de toute contrainte. La branche est soumise à la seule pesanteur et à des efforts de flexion pure, sans effort tranchant, dans la mesure où elle est suffisamment élancée. La branche pouvant prendre une forme très différente de sa forme initiale, on applique l'Élasticité en grands déplacements, ou Élastique [9], qui utilise l'expression exacte de la courbure et non la dérivée seconde de l'ordonnée par rapport à l'abscisse. Comme on applique les formules de la flexion pure, l'anisotropie du bois n'intervient pas. La branche croît dans une direction fixe, sans ramifications, encadrée dans un tronc droit, à vitesse constante sur une même branche quel que soit son âge d'apparition, à largeur des cernes annuels également constante. Il n'y a pas d'élagage, naturel ou non, ni de contact avec le sol. Pour prendre en compte les changements de dimensions de la branche, on a été amené à remplacer la relation linéaire entre les contraintes et les déformations (ou entre les moments et les courbures), par la même relation entre leurs dérivées, comme en Hypoélasticité ([2], [3]).

La théorie de l'Élasticité, où les déformations sont réversibles et la répartition des contraintes à travers la section est linéaire, s'applique à un objet dont la géométrie est donnée à l'avance et qui est supposé libre de toute contrainte dans son état initial, par exemple une branche soumise temporairement à l'action du vent ou au poids de la neige ou des fruits. Considérons une branche non pesante : c'est une poutre droite conique. Supposons maintenant qu'elle devienne soudain pesante, en appliquant directement à cette poutre la théorie élastique de la flexion, on obtiendrait une déformée ayant une concavité vers le bas.

Une poutre fléchie reprend pratiquement sa forme initiale lorsqu'on libère les efforts appliqués. Une branche coupée ne se redresse que très partiellement, surtout si elle est âgée. La courbure de la branche, permanente, correspond à une déformation souvent très supérieure à la déformation à la rupture du bois. Elle pourrait être attribuée en partie à la viscoélasticité et à la plasticité du matériau, mais l'essentiel de cette courbure est dû au couplage entre la flexion et la croissance. Le bois neuf constitue un manchon initialement libre de toute contrainte. Or, dans la théorie des poutres, la répartition des contraintes à travers la section est linéaire. Dans une branche, elle ne peut l'être car, étant nulle en surface, elle serait nulle partout. Si on coupe la branche, pour calculer la répartition des contraintes satisfaisant au nouvel équilibre mécanique, on superpose à l'ancienne répartition une répartition qui, étant linéaire, ne pourra libérer entièrement les contraintes internes. Le bois récent, en maintenant déformé le bois ancien, empêche la branche de se redresser.

La branche grandit dans la direction de croissance, vers le haut, se renforce et fléchit un peu vers le bas, à chaque cycle de croissance, sous son accroissement de poids. La courbure est négative lorsque la flexion l'emporte sur la croissance et positive dans le cas contraire (la variation de courbure due à la maturation du bois [10] n'est pas prise en compte dans ce schéma). La courbure est orientée vers le bas du côté du tronc et vers le haut à l'extrémité des branches. Ce changement de signe de la courbure se traduit par une forme infléchie qui va être calculée dans le paragraphe suivant.

3. PRINCIPE DU CALCUL. — En admettant que la vitesse de croissance \dot{l} soit constante, la longueur l de la branche à l'instant t est :

$$l(t) = \dot{l}t.$$

De même, le rayon r des branches augmente à une vitesse \dot{r} constante (largeur des cernes constante). Le rayon varie linéairement le long de la branche en fonction de l'abscisse curviligne s et du temps t :

$$r(s, t) = \dot{r} \left(t - \frac{s}{\dot{r}} \right).$$

Le moment d'inertie (section circulaire) s'exprime par la relation

$$I(s, t) = \frac{\pi}{4} r^4(s, t).$$

La branche est soumise à une densité d'efforts linéique :

$$p(s, t) = \pi r^2(s, t) \rho g$$

où ρ est la masse spécifique du bois et g l'accélération de la pesanteur.

Par dérivation on obtient sa vitesse de variation :

$$\dot{p}(s, t) = 2\pi \dot{r}(s, t) r(s, t) \rho g.$$

Le moment de flexion $M(s, t)$, créé en un point d'abscisse curviligne s à l'instant t par le poids de la branche est donné par l'expression :

$$M(s, t) = \int_s^{l(t)} [x(s, t) - x(s', t)] p(s', t) ds'.$$

La vitesse de variation du moment de flexion à un instant donné t en un point de la branche considérée comme une poutre courbe définie par sa forme $x(s, t)$, $y(s, t)$ et soumise à la vitesse de variation $\dot{p}(s, t)$ de la charge répartie est obtenue en dérivant le moment de flexion :

$$\dot{M}(s, t) = \int_s^{l(t)} [x(s, t) - x(s', t)] \dot{p}(s', t) ds' + \int_s^{l(t)} [\dot{x}(s, t) - \dot{x}(s', t)] p(s', t) ds' + \dot{l}(l(t), t) [x(s, t) - x(l(t), t)].$$

Le dernier terme est nul puisque $p(l(t), t) = 0$.

Le deuxième terme tient compte de la variation du moment due aux déplacements horizontaux successifs des points s .

La formule de la flexion des poutres donne la courbure en fonction du moment de flexion :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{M}{EI}$$

où E est le module d'élasticité du bois, I le moment d'inertie et α l'angle de la poutre avec l'horizontale.

En dérivant l'expression de la courbure par rapport au temps, on obtiendrait :

$$\frac{d\dot{\alpha}}{ds} = \frac{\dot{M}(s, t)}{EI(s, t)} - \frac{M(s, t) \dot{I}(s, t)}{EI^2(s, t)}.$$

Lorsque le moment d'inertie diminue, par exemple en taillant la branche de façon à diminuer son épaisseur, la courbure augmente, du moins si le moment de flexion reste constant par un artifice quelconque. Si le moment d'inertie croît, et que le renfort n'est pas contraint au départ, toujours avec un moment de flexion constant, la branche ne se déforme pas. Cette hypothèse fondamentale, voisine de celle utilisée pour prévoir les contraintes dans les matériaux polymérisant sous contrainte où c'est le module qui

augmente [11], permet de tenir compte de ce qu'un point matériel créé par le cambium ne participe au soutien qu'à partir de sa création. Une augmentation du moment d'inertie, comme une augmentation du module, n'a pas d'effet sur la déformation : les formules « instantanées » de la Résistance des Matériaux ne s'appliquent pas à une structure en croissance, on écrit donc :

$$\frac{d\dot{\alpha}}{ds} = \frac{\dot{M}(s, t)}{EI(s, t)}.$$

En intégrant par rapport à l'abscisse curviligne le long de la branche, on obtient la vitesse de rotation, toujours de même signe, cumulée depuis la naissance de la branche, correspondant à une flexion vers le bas :

$$\dot{\alpha}(s, t) = \int_0^s \frac{d\dot{\alpha}(s', t)}{ds'} ds'.$$

Elle est bien nulle pour $s=0$ et la condition d'encastrement de la branche dans le tronc est satisfaite. Elle est maximale à l'extrémité de la branche. Pour obtenir la pente de la branche, on intègre la vitesse de rotation en fonction du temps, à partir de la création du point matériel considéré, à l'instant $t = s/l$:

$$\alpha(s, t) = \alpha\left(s, \frac{s}{l}\right) + \int_{s/l}^t \dot{\alpha}(s, t') dt'.$$

Pour simplifier, la loi d'orientation de la pousse terminale a été choisie indépendante de l'histoire de la branche et de sa longueur, ce qui n'autorise pas de réorientation possible :

$$\alpha\left(s, \frac{s}{l}\right) = \alpha(0, 0).$$

Les coordonnées des points de la branche, définissant sa forme, sont calculées par une dernière intégration le long de la fibre moyenne :

$$x(s, t) = \int_0^s \cos \alpha(s', t) ds'$$

$$y(s, t) = \int_0^s \sin \alpha(s', t) ds'.$$

4. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE. — Une solution analytique à ce problème ne semble pas possible. Il est par contre simple de le résoudre numériquement à l'aide d'un microordinateur grâce à la méthode des différences finies. On procède par itération, chaque itération correspondant à un cycle de croissance. La nouvelle forme de branche est calculée à partir de l'ancienne, considérée comme une poutre de forme et de dimensions connues par le précédent calcul. On lui applique une charge répartie correspondant à l'augmentation de poids acquise durant ce cycle. Les déplacements calculés sont ensuite ajoutés aux anciennes coordonnées pour obtenir la nouvelle forme de branche. On résout ainsi les problèmes dus aux grands déplacements ainsi qu'aux changements d'épaisseur et de longueur de la branche.

Pratiquement, la branche est divisée en maillons équidistants. La distance entre les maillons reste constante puisque les branches d'arbre ne s'allongent qu'à leurs extrémités. Les dérivées ont été remplacées par des différences entre maillons successifs et les intégrales par de simples sommations.

Les figures 1 à 3 montrent le résultat des calculs lorsqu'on fait varier l'angle de départ des rameaux. La comparaison des figures 2 et 4 montre que deux arbres de caractéristiques identiques mais de tailles différentes ne sont pas semblables, c'est l'effet d'échelle.

5. CONCLUSION. — Le modèle prédit une forme de branche pouvant présenter un point d'inflexion, associé à une déformation permanente des branches, sans faire appel à la théorie de la plasticité. Il se distingue du modèle purement élastique de MacMahon [6] par la prise en compte du couplage croissance-flexion. Il est très simplifié, puisque les phénomènes de réorientations et de régulation de la forme n'ont pas été traités. Toutefois, comme le calcul est effectué par un processus numérique et itératif, des consignes biologiques plus complexes peuvent y être introduites relativement facilement sous forme d'équations supplémentaires.

Note remise le 17 juillet 1989, acceptée après révision le 10 mai 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. R. ARCHER et F. E. BYRNES, On the distribution of tree growth stresses. Part I: An anisotropic plane strain theory, *Wood Sci. Technol.*, 8, 1974, p. 184-196.
- [2] FENG-HSIANG HSU, The influences of Mechanical loads on the form of a growing elastic body, *J. Biomech.*, 1, 1968, p. 303-311.
- [3] J. L. NOWINSKI, Mechanics of growing materials, *Int. J. Mech. Sci.*, 20, 1978, p. 493-504.
- [4] J. CRABBE et H. LAKHOUA, *Ann. Sci. Nat.*, 12^e série, 19, 1978, p. 125.
- [5] R. M. KELLOG et G. L. STEUCEK, *Mechanical stimulation and xylem production of Douglas fir*, CAPPI Forest Biology Wood Chemistry Conf., Madison, 1977, p. 151-157.
- [6] T. MACMAHON, Size and Shape in Biology, *Science*, 179, 1973, p. 1201-1204.
- [7] M. FOURNIER, Déformations de maturation, contraintes « de croissance » dans l'arbre sur pied, réorientation et stabilité des tiges, *Sém. « Développement architectural, apparition de bois de réaction et mécanique de l'arbre sur pied »*, Montpellier, 20 janvier 1989, L.M.G.M.C., U.S.T.L. Montpellier.
- [8] P. P. GILLIS, *Theory of Growth Stresses*, *Holzforschung*, Bd. 27, Heft 6, 1973, p. 197-207.
- [9] S. P. TIMOSHENKO, *Théorie de la stabilité élastique*, Dunod, Paris, 1966.
- [10] M. FOURNIER, Mécanique de l'arbre sur pied : maturation, poids propre, contraintes climatiques dans la tige standard, *Thèse*, I.N.P.L., Nancy, 1989.
- [11] B. SCHAEFFER, *Rhéologie des propegols en cours de polymérisation*, *Industrie Minérale*, n° spécial Rhéologie, IV, n° 5, 1977, p. 225-234.