Dans le plan, on considère un triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] telle que, $AH = BC = 4$. On prendra le centimètre pour unité.

1. En justifiant, placer le point G barycentre du système de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 1).
2. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 2\left\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\|$
3. On désigne par M un point quelconque du plan. On pose $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

a) Montrer que $\vec{V} = 2\overrightarrow{HA}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \vec{V} \right\|$.

4. Soit E_3 l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MH} = 5$

a) Le point B appartient-il à E_3 ?

b) Déterminer et construire l'ensemble E_3.

5. Déterminer et construire l'ensemble E_4 des points M du plan tels que $MB^2 + MC^2 = 40$.

CORRECTION

1. G est le barycentre de {(A ; 2) (B ; 1) (C ; 1)}.

Le triangle ABC est isocèle en A donc la hauteur (AH) est aussi médiane donc H est le milieu de [BC] donc le barycentre de {(B ; 1) (C ; 1)} donc G est le barycentre de {(A ; 2) (H ; 2)} donc G est le milieu de [AH].

2. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (2+1+1)\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MH}$ donc $\left\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 2\left\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| \Leftrightarrow 4\,MG = 4\,MH$

$\Leftrightarrow MG = MH \Leftrightarrow$ M décrit la médiatrice de [GH]

E_1 est la médiatrice de [GH].

3. *a*. $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) - (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) - (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC}) = 2\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}$

H est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ donc $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{HA}$

3. *b*. $\left\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 2\left\| \vec{V} \right\| \Leftrightarrow 4\,MG = 4\,HA \Leftrightarrow MG = HA$ donc E_2 est le cercle de centre G de rayon HA

4. *a*. $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BH} = (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}) . \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH}^2 = BH^2 = 4$ donc B n'appartient pas à E_3.

4. *b*. $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MH} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) . (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GH}) = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) . (\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GA}) = MG^2 - GA^2$

$\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MH} = 5 \Leftrightarrow MG^2 - GA^2 = 5 \Leftrightarrow MG^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow MG^2 = 9 \Leftrightarrow MG = 3$

E_3 est le cercle de centre G de rayon 3

5. $MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC})^2 = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 + (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HB})^2$

$MB^2 + MC^2 = MH^2 + 2\,\overrightarrow{MH} . \overrightarrow{HB} + HB^2 + MH^2 - 2\,\overrightarrow{MH} . \overrightarrow{HB} + HB^2$

$MB^2 + MC^2 = 2\,MH^2 + 2\,HB^2$

$MB^2 + MC^2 = 40 \Leftrightarrow 2\,MH^2 + 2\,HB^2 = 40 \Leftrightarrow MH^2 + HB^2 = 20 \Leftrightarrow MH^2 + 4 = 40 \Leftrightarrow MH^2 = 36 \Leftrightarrow MH = 6$

E_4 est le cercle de centre H de rayon 6.