LIBAN juin 2016

On considère un solide *ABCDEF* constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré *ABCD* de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée en annexe (à rendre avec la copie). Toutes les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AK})$.

1. a. Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points *I*, *E* et *F*.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (*ABE*).

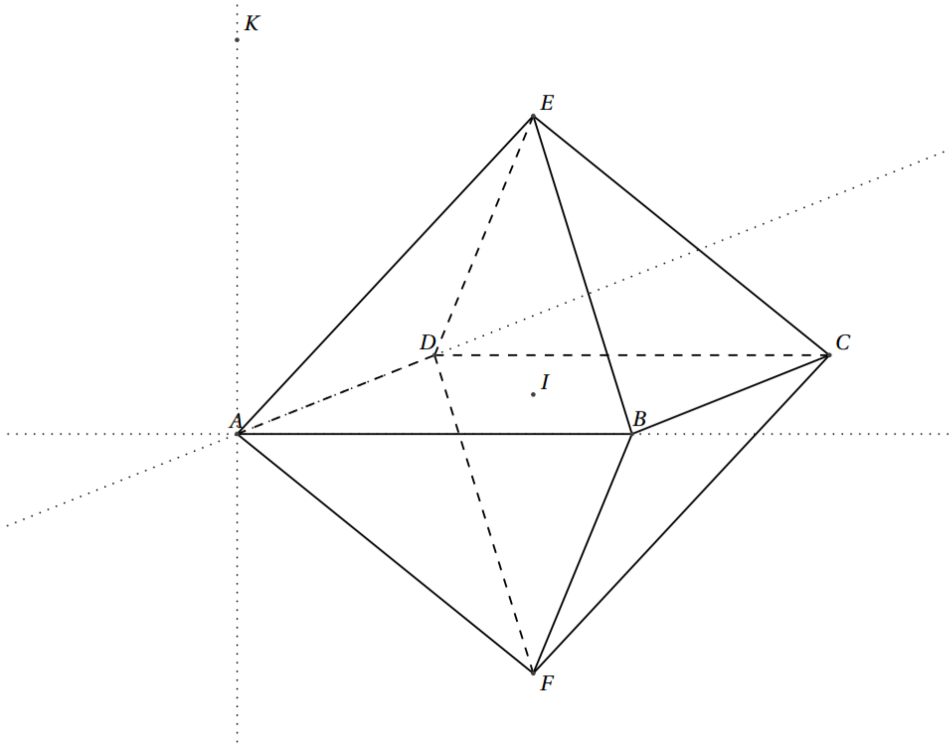
c. Déterminer une équation cartésienne du plan (*ABE*).

2. On nomme *M* le milieu du segment [*DF*] et *N* celui du segment [*AB*]

a. Démontrer que les plans (*FDC*) et (*ABE*) sont parallèles.

b. Déterminer l'intersection des plans (*EMN*) et (*FDC*).

c. Construire sur l'annexe (à rendre avec la copie) la section du solide par le plan (*E M N*).



CORRECTION

1. *a*. $AE = CE = 1$ donc le triangle *AEC* est isocèle en *E*, I est le milieu de [*AC*] donc (*EI*) est médiane et hauteur issue de *E* de ce triangle donc le triangle *AIE* est rectangle en I, $AI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (demi diagonale du carré *ABCD* de côté 1)

$AE^2 = AI^2 + IE^2$ donc $IE^2 = 1^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ donc $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc les coordonnées des points *I*, *E* et *F* sont $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b. $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \times 1 - 2 \times 0 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times 0 = 0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE} = 0 \times \dfrac{1}{2} - 2 \times \dfrac{1}{2} + \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (*ABE*) donc est normal au plan (*ABE*).

c. Une équation cartésienne du plan (*ABE*) est de la forme $-2y + \sqrt{2}\,z + d = 0$

$A \in (ABE)$ donc $d = 0$ donc $-2y + \sqrt{2}\,z = 0$ soit en divisant par $\sqrt{2}$, une équation cartésienne du plan (*ABE*) est $-\sqrt{2}\,y + z = 0$

2. *a*. Les coordonnées du point *F* sont $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, celle de *C* sont (1 ; 1 ; 0) donc $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AE}$, donc

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{FC} = 0$

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{DF} = 0 \times \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (*FDC*) donc est normal au plan (*FDC*).

$\vec{n}$ est normal au plan (*FDC*) et au plan (*ABE*) donc les plans (*FDC*) et (*ABE*) sont parallèles.

b. *M* est le milieu du segment [*DF*] donc appartient au plan (*FDC*) donc à l'intersection des plans (*EMN*) et (*FDC*) donc les plans (*EMN*) et (*FDC*) se coupent suivant une droite passant par *M*.

Les plans (*FDC*) et (*ABE*) sont parallèles donc l'intersection des plans (*FDC*) et (*ABE*) et l'intersection des plans (*EMN*) et (*FDC*) sont deux droites parallèles.

N est le milieu de [*AB*] donc appartient aux plans (*ABE*) et (*EMN*) donc l'intersection des plans (*EMN*) et (*AEB*) est la droite (*EN*).

L'intersection des plans (*EMN*) et (*FDC*) est la droite passant par *M* parallèle à (*EN*).

c. Le plan (*EMN*) coupe :

- le plan (*AEB*) suivant (*EN*)
- le plan (*FDC*) suivant (*M*P)
- le plan (*EDC*) suivant (*E*P)
- On démontre que les plans (*ABF*) et (*ECD*) sont parallèles donc le plan (*EMN*) coupe le plan (*ABF*) suivant une droite passant par *N* et parallèle à (*EP*). Soit *Q* le point d'intersection de cette droite et de (*AF*)
- Le plan (*EMN*) coupe (*ADF*) suivant (*MQ*).