1. A 23 heures, heure à laquelle finit la représentation de Tosca, la diva qui chante le rôle titre prend son temps pour quitter l'opéra Bastille. Ce temps, en heures, peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{3}$.

Calculer la probabilité que la diva qui l'opéra :

a. Avant minuit

b. Après 1 h du matin

2. Après chaque représentation, un admirateur attend la diva pour lui offrir des fleurs. Si elle sort avant 1 h du matin, il rentre chez lui en métro, sinon il prend un taxi.

a. Calculer la probabilité *p* qu'il rentre en métro après une représentation

b. Cette année Tosca est à l'affiche pour une série de 50 représentations. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où l'admirateur rentre chez lui en métro. Déterminer la loi de X et son espérance E(X).

c. Le retour en métro revient à 1 euro, mais celui en taxi coûte 10 euros. Soit Y la variable aléatoire égale au coût de son retour à la maison durant la série de représentations. Déterminer la loi de Y et son espérance E(X).

CORRECTION

1. T suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{3}$ donc en comptant le temps *t* à partir de la fin de la représentation, donc à partir de 23 heures.

$P(T \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{3}t}$ et $P(T \geq t) = e^{-\frac{1}{3}t}$

a. Si la diva sort avant minuit, on cherche $P(T \leq 1)$

$P(T \leq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{3}} = 1 - 0{,}7165 = 0{,}2835$

b. Si la diva sort après 1 h du matin, soit 2 heures après la fin de la représentation, on cherche $P(T \geq 2)$

$P(t \geq 2) = e^{-\frac{2}{3}} = 0{,}5134$

2. *a.* la probabilité *p* qu'il rentre en métro après une représentation est la probabilité que la diva sorte avant 1 h du matin donc $P(T \leq 2) = 1 - e^{-\frac{2}{3}}$ soit 0,4866

b. On a une succession de 50 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- succès : l'admirateur rentre chez lui en métro ($p = 0{,}4866$)
- échec : l'admirateur ne rentre pas chez lui en métro ($q = 0{,}5134$)

donc la variable aléatoire X donnant le nombre de jours où l'admirateur rentre chez lui en métro suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,4866)

$E(X) = n\,p = 50 \times 0{,}4866 = 24{,}33$

c. Y prend les valeurs 1 et 10.

Si le coût du retour est de 1 €, la diva est sortie avant 1 heure donc $p(Y = 1) = 0{,}4866$

Si le coût du retour est de 10 €, la diva est sortie après 1 heure donc $p(Y = 10) = 0{,}5134$

y	1	10	Total
$P(Y = y)$	0,4866	0,5134	1
$y\,P(Y = y)$	0,4866	5,134	5,6206

E(Y) = 5,6206

En moyenne, après chaque représentation, l'admirateur dépensera 5,62 €