

Comment trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z - z_A}{z - z_B}$ soit imaginaire pur ?

Commencer par le domaine de définition : $z \neq z_B$ donc $M \neq B$

$$\frac{z - z_A}{z - z_B} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z - z_A}{z - z_B} = 0 \\ \text{ou} \\ \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = z_A \\ \text{ou} \\ \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M = A \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M = A \\ \text{ou} \\ \text{le triangle MAB est rectangle en M} \end{cases} \Leftrightarrow M \text{ décrit le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B$$

La même technique permet de répondre aux questions $\frac{z - z_A}{z - z_B}$ est imaginaire pur non nul.