Définition
Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction f.
Cette équation fait intervenir f, ses dérivées successives f', f'' f'''.. , et des fonctions connues.

L'usage veut que, souvent, dans une équation différentielle, la fonction inconnue soit noté y et ses dérivées succesives y', y''…
La variable, x ou t, est la plupart du temps omise.

ATTENTION
Les propiétés suivantes ne sont valables ques si les coefficients de l'équation différentielle sont des constantes

Propriété
Soit a un réel. Soit (E) l'équation différentielle : $y' = a\,y$
Les solutions de (E), sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions y définies par $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{a\,x}$ où C est une constante quelconque

L'équation différentielle (E) admet donc une infinité de solutions (chacune correspond à un choix de la constante C).

Démonstration :
1. Vérifions que les fonctions proposées sont bien solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $y : x \rightarrow \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{a\,x}$ sont de la forme $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{u}$ où $u(x) = a\,x$.
Comme u est dérivable sur $\mathbb{R}$, y l'est aussi et : $y' = \mathrm{C}\,u'\,\mathrm{e}^{u}$
Ce qui donne, pour tout réel x : $y'(x) = a\,\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{a\,x} = a\,y(x)$
D'où : $y' = a\,y$ sur $\mathbb{R}$
Donc les fonctions y proposées sont bien des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. (Ce qui prouve l'existence de solutions)

2. Montrons que les fonctions proposées sont les seules solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. (C'est-à-dire, qu'il n'y en a pas d'un autre type que $x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{a\,x}$).

Soit y une solution quelconque de (E) sur $\mathbb{R}$. (On sait déjà que ça existe d'après la partie 1).
Soit la fonction z définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par : $z(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{-a\,x}$
La fonction z est de la forme $z = u\,v$ avec $u = y$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-a\,x}$
Comme les fonctions u et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction z l'est aussi et on a : $z' = u'\,v + u\,v'$
D'où, pour tout réel x : $z'(x) = y'(x)\,\mathrm{e}^{-a\,x} - a\,y(x)\,\mathrm{e}^{-a\,x}$
$z'(x) = \mathrm{e}^{-a\,x}\,(y'(x) - a\,y(x))$
Par hypothèse, y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, donc $y'(x) - a\,y(x) = 0$
On en déduit que pour tout réel x : $z'(x) = 0$
On en déduit que z est constante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe une constante C telle que pour tout réel x :
$z(x) = \mathrm{C}$ donc $y(x)\,\mathrm{e}^{-a\,x} = \mathrm{C}$ donc $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{a\,x}$

Propriété
Soient a et b deux réels avec a non nul.
Soit (E) l'équation différentielle : $y' = a\,y + b$
Les solutions de (E), sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions y définies par $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{a\,x} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante quelconque

Démonstration
Soit la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$, par : $u = -\dfrac{b}{a}$, u est constante donc $u' = 0$ de plus $a\,u + b = 0$ donc $u' = a\,u + b$
donc u est une solution de (E).

Soit y une solution quelconque de (E). (On sait qu'il en existe au moins une : u)
On a sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} y' = a\,y + b \\ u' = a\,u + b \end{cases}$
En retranchant membre à membre : $(y - u)' = a\,(y - u)$
Donc $y - u$ est une solution de l'équation différentielle $y' = a\,y$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$
donc $y(x) - u(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{a\,x}$ où C est une constante réelle
donc $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{a\,x} + u(x)$
donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{a\,x} - \dfrac{b}{a}$

Propriété
Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit (E) l'équation différentielle : $y' = a\,y + f$
Soit (E_0) l'équation différentielle sans second membre associée $y' = a\,y$
Soit u une solution particulière de (E), sur I : $u' = a\,u + f$ sur I
Alors les solutions y de (E), sur I, s'obtiennent en ajoutant les solutions de (E_0) avec u : $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{a\,x} + u(x)$

Démonstration
u une solution particulière de (E), sur I : $u' = a\,u + f$ sur I
(E_0) l'équation différentielle sans second membre associée : $y' = a\,y$ donc les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $y(x) = C\,e^{a\,x}$

On a les équivalences suivantes :
y solution de (E) sur I $\Leftrightarrow y' = a\,y + f$ sur I
$\Leftrightarrow y' - a\,y = u' - a\,u$ sur I $\Leftrightarrow (y - u)' = a\,(y - u)$ sur I
$\Leftrightarrow y - u$ solution de (E_0) sur I $\Leftrightarrow y(x) = C\,e^{a\,x} + u(x)$ pour tout $x \in$ I

Propriété
Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit (E) l'équation différentielle : $y' = a\,y + f$
On suppose que l'on connaît une solution particulière u de (E).
Soient x_0 et y_0 deux réels.
Il existe une unique solution f, sur I, de l'équation différentielle (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$

Démonstration
Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme :
$y(x) = C\,e^{a\,x} + u(x)$ pour tout $x \in$ I
La condition initiale $f(x_0) = y_0$ se traduit par :
$C\,e^{a\,x_0} + u(x_0) = y_0$
Il faut déterminer C :
$C\,e^{a\,x_0} = (y_0 - u(x_0))$ soit $C = e^{-a\,x_0}\,(y_0 - u(x_0))$
donc en remplaçant dans $y(x) = C\,e^{-a\,x} + u(x)$
$y(x) = [\,e^{-a\,x_0}\,(y_0 - u(x_0))]\,e^{a\,x} + u(x)$

Il existe une unique solution f, sur I, de l'équation différentielle (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$:
f est définie sur I par : $f(x) = (y_0 - u(x_0))\,e^{a\,(x - x_0)} + u(x)$