Pondichéry avril 2015

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés nombres de Mersenne.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(b, c) = 1$.

Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que : « si b divise a et c divise a alors le produit $b c$ divise a . »

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.

Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-contre. Il affirme que 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$ et 12 ne divise pas $2^{33} - 1$.

$(2^{33} - 1) \div 3$	286331130
$(2^{33} - 1) \div 4$	2147483648
$(2^{33} - 1) \div 12$	715827882.6
□	

a. En quoi cette affirmation contredit elle le résultat démontré à la question 1.?

b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.

c. En remarquant que $2 \equiv -1 [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \dots + (2^3)^{10}$.

e. En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier? Justifier.

4. On donne l'algorithme ci-contre où $\text{MOD}(N, k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k .

a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié?

c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié?

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3 k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation:	Demander à l'utilisateur la valeur de n . Affecter à k la valeur 2
Traitement:	Tant que $\text{MOD}(2^n - 1, k) \neq 0$ et $k \leq \sqrt{2^n - 1}$ Affecter à k la valeur $k + 1$ Fin de Tant que.
Sortie:	Afficher k . Si $k > \sqrt{2^n - 1}$ Afficher « CAS 1 » Sinon Afficher « CAS 2 » Fin de Si

CORRECTION

1. b divise a donc il existe un entier q tel que $a = b q$

c divise a alors donc c divise $b q$ or $\text{PGCD}(b, c) = 1$ donc d'après le théorème de Gauss, c divise q donc il existe un entier k tel que $q = c k$ donc $a = b c k$ or k est un entier donc le produit $b c$ divise a .

2. a. 3 et 4 sont premiers entre eux, 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$ d'après la question 1. 12 divise $2^{33} - 1$. Ce qui est en contradiction avec l'affirmation 12 ne divise pas $2^{33} - 1$.

b. $2^2 \equiv 0$ modulo 4 or $2^{33} = 2^2 \times 2^{31}$ donc $2^{33} \equiv 0 \times 2^{31}$ modulo 4 donc $2^{33} \equiv 0 [4]$ donc $2^{33} - 1 \equiv -1 [4]$ 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.

c. $2 \equiv -1 [3]$, donc $2^{33} \equiv (-1)^{33} [3]$ soit $2^{33} \equiv -1 [3]$ donc $2^{33} - 1 \equiv -2 [3]$ soit $2^{33} - 1 \equiv 1 [3]$, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

d. Si $q \neq 1, 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ donc en appliquant ceci à $q = 2^3$ et $n = 10$: $S = \frac{(2^3)^{10+1} - 1}{2^3 - 1}$ soit $S = \frac{2^{33} - 1}{7}$

e. $S = \frac{2^{33} - 1}{7}$ donc $2^{33} - 1 = 7 S$, S est un entier naturel donc 7 divise $2^{33} - 1$.

3. $2^7 - 1 = 127$ or $11 < \sqrt{127} < 12$ or 127 n'est divisible pas par 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 donc le nombre de Mersenne $2^7 - 1$ est premier.

4. a. $n = 33$

k	2	3	4	5	6	7
$\text{MOD}(2^{33} - 1, k)$	1	1	3	1	1	0
Affichage						Cas 2

$n = 7$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\text{MOD}(2^7 - 1, k)$	1	1	3	2	1	1	7	1	7	6
Affichage										Cas 1

b. CAS 2 correspond au cas où le nombre de Mersenne étudié n'est pas premier (divisible par k)

c. CAS 1 correspond au cas où le nombre de Mersenne étudié est premier (divisible par aucun nombre entier compris entre 2 et $\sqrt{2^n - 1}$)