$u_0 + u_1 = \int_0^1 1\,dx = 1$

d'où $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln(1+e) + \ln 2$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}-1)}{1+e^{-x}}\,dx$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-nx}(e^{-x}-1)}{1+e^{-x}}$ est négative sur [0 ; 1], donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$.

(u_n) est donc décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$, $f_n(x) \geqslant 0$ donc $u_n \geqslant 0$.

(u_n) est décroissante minorée par 0 donc elle est convergente.

4. a) Pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n + u_{n-1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$u_n + u_{n-1} = \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}[e^{-x}+1]}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$u_n + u_{n-1} = \int_0^1 e^{-(n-1)x}\,dx$$

$$u_n + u_{n-1} = \left[\frac{-1}{n-1}e^{-(n-1)x}\right]_0^1$$

$$u_n + u_{n-1} = -\frac{1}{n-1}e^{-n+1} + \frac{1}{n-1}$$

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n-1}[1 - e^{-n+1}]$$

b) (u_n) et (u_{n-1}) ont même limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-1} = 0$ d'où $\ell + \ell = 0$ donc $\ell = 0$.

143 **1. a)** Pour tout $x \in [0\,;1]$, $x(x+3) \geqslant 0$ donc :

$$x^2 + 3x + 2 \geqslant 2.$$

b) La fonction $x \mapsto x^2 + 3x + 2$ est continue et ne s'annule pas sur [0 ; 1] et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$ est continue, donc h_n est continue sur [0 ; 1].

2. a) $g'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{(x+2)^2}}{\dfrac{x+1}{x+2}} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

b) $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$

$$u_0 = \left[\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]_0^1 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{6}$$

3. a) $k'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+2} = \dfrac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$

$$2u_1 + 3u_0 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+3x+2}\,dx + \int_0^1 \frac{3}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$2u_1 + 3u_0 = \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$2u_1 + 3u_0 = [\ln(x^2+3x+2)]_0^1$$

$$2u_1 + 3u_0 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$$

b) $2u_1 = \ln 3 - 3\ln\left(\dfrac{4}{3}\right) - 4\ln 3 - 6\ln 2$

$u_1 = 2\ln 3 - 3\ln 2$

4. $u_2 + 3u_1 + 2u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x+2}\,dx$

$u_2 + 3u_1 + 2u_0 = \displaystyle\int_0^1 1\,dx = 1$

d'où $u_2 = 1 - [6\ln 3 - 9\ln 2 + 4\ln 2 - 2\ln 3]$

$u_2 = 1 - 4\ln 3 + 5\ln 2$

5. a) Pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in [0\,;1]$,

$\dfrac{x^n}{x^2+3x+2} \geqslant 0$ donc $h_n(x) \geqslant 0$ donc $u_n \geqslant 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+3x+1}\,dx$$

Pour tout x de [0 ; 1], $\dfrac{x^n(x-1)}{x^2+3x+1} \leqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc (u_n) décroissante.

(u_n) est minorée par 0 et (u_n) est décroissante donc (u_n) est convergente.

c) Pour tout x de [0 ; 1],

$$x^2 + 3x + 2 \geqslant 2 \text{ donc } \frac{1}{x^2+3x+2} \leqslant \frac{1}{2}$$

donc $\dfrac{x^n}{x^2+3x+2} \leqslant \dfrac{1}{2}x^n$

d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+3x+2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2}x^n\,dx$, c'est-à-dire :

$$u_n \leqslant \frac{1}{2(n+1)}.$$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2(n+1)} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = \int_0^1 x^n\,dx$$

$$u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = \frac{1}{n+1}$$

b) Pour tout nombre entier $n \geqslant 2$:

$$\begin{array}{rl} u_{n+2} & \leqslant u_n \\ 3u_{n+1} & \leqslant 3u_n \\ 2u_n & \leqslant 2u_n \\ \hline u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n & \leqslant 6u_n \end{array} \quad \text{car } (u_n) \text{ décroissante,}$$

ce qui donne $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 6u_n$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{6(n+1)} \leqslant u_n$.

$$\begin{array}{rl} u_n & \leqslant u_n \\ 3u_n & \leqslant 3u_{n-1} \\ 2u_n & \leqslant 2u_{n-2} \\ \hline 6u_n & \leqslant u_n + 3u_{n-1} + 2u_{n-2} \end{array} \quad \text{car } (u_n) \text{ décroissante,}$$

ce qui donne $u_n \leqslant \dfrac{1}{6(n-1)}$.

Finalement, pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{6(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{6(n-1)}$.

c) $\dfrac{n}{6(n+1)} \leqslant nu_n \leqslant \dfrac{n}{6(n-1)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \dfrac{1}{6}$.

Algorithmique et suites

Thème 1 : Aborder ou réinvestir la boucle « Pour »

Une approche

1. $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{0+1}{1} = 1$; $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{1+1}{0+1} = 2$; $\dfrac{u_4}{u_3} = \dfrac{2+1}{1+1} = \dfrac{3}{2}$.

2. a) L'algorithme de gauche permet de calculer u_4 et le rapport $\dfrac{u_4}{u_3}$.

b)

Casio

```
======FIBONACC======
"DONNER N"?→N↵
1→A↵
0→B↵
1→S↵
For 2→K To N↵
B→A↵
S→B↵
A+B→S↵
Next↵
S◢
S÷B→Q↵
Q
```

TI

```
PROGRAM:FIBONACC
:Input "DONNER N
",N
:1→A
:0→B
:1→S
:For(K,2,N)
:B→A
:S→B
:A+B→S
:End
:Disp S
:S/B→Q
:Disp Q
```

On peut conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1{,}618\ 034$.

3. a) On note P(n) la propriété :

$$« u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] ».$$

Initialisation

$u_0 = 0$.

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right] = \frac{\sqrt{5}}{5}(1-1) = 0.$$

$u_1 = 1$.

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{5} = 1.$$

P(0) et P(1) sont donc vraies.

Hérédité

Soit k un nombre entier quelconque, $k \geqslant 0$.

On suppose que P(k) et P($k+1$) sont vraies et montrons que P($k+2$) l'est aussi.

$$u_{k+2} = u_{k+1} + u_k = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right] + \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]$$

$$u_{k+2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]$$

$$u_{k+2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]$$

$$u_{k+2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

Or $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

D'où $u_{k+2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]$.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, comme P(0) et P(1) sont vraies, on peut conclure que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$.

b) Pour tout nombre entier naturel non nul :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}$$

Or $0 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n = 0$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

1 **1. a)** $u_1 = 0$, $u_2 = \dfrac{1}{2}\left[\ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{2}\right] = -\dfrac{\ln 2}{2}$ et $u_3 = \dfrac{1}{3}\left[\ln\dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{3}{3}\right] = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{9}$.

b) L'algorithme permet de calculer les termes de la suite u.

d) En prenant des valeurs de n assez grandes (10^4, 10^5…), on peut conjecturer que la suite u converge vers – 1.