Polynésie septembre 2009

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = -n\,x - x\ln x$.

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes (C_0), (C_1) et (C_2) représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2 sont données en annexe.

On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.

1. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que pour $x \in\,]0\,;+\infty[$, $f'_n(x) = -n - 1 - \ln x$ où f'_n désigne la fonction dérivée de f_n.

2. *a.* Démontrer que la courbe (C_n) admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

b. Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.

c. Placer sur la figure en annexe les points A_0, A_1, A_2.

3. *a.* Démontrer que la courbe (C_n) coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}.

b. Démontrer que la tangente à (C_n) au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.

c. Placer sur la figure en annexe les points B_0, B_1, B_2.

Partie C : Calculs d'aires

Pour tout entier naturel n, on considère le domaine du plan D_n délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_n) et les droites d'équation $x = e^{-n-1}$ et $x = e^{-n}$.

On note I_n l'aire en unités d'aires du domaine D_n.

1. Hachurer, sur la figure donnée en annexe, les domaines D_0, D_1, D_2.

2. *a.* À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,\mathrm{d}x$.

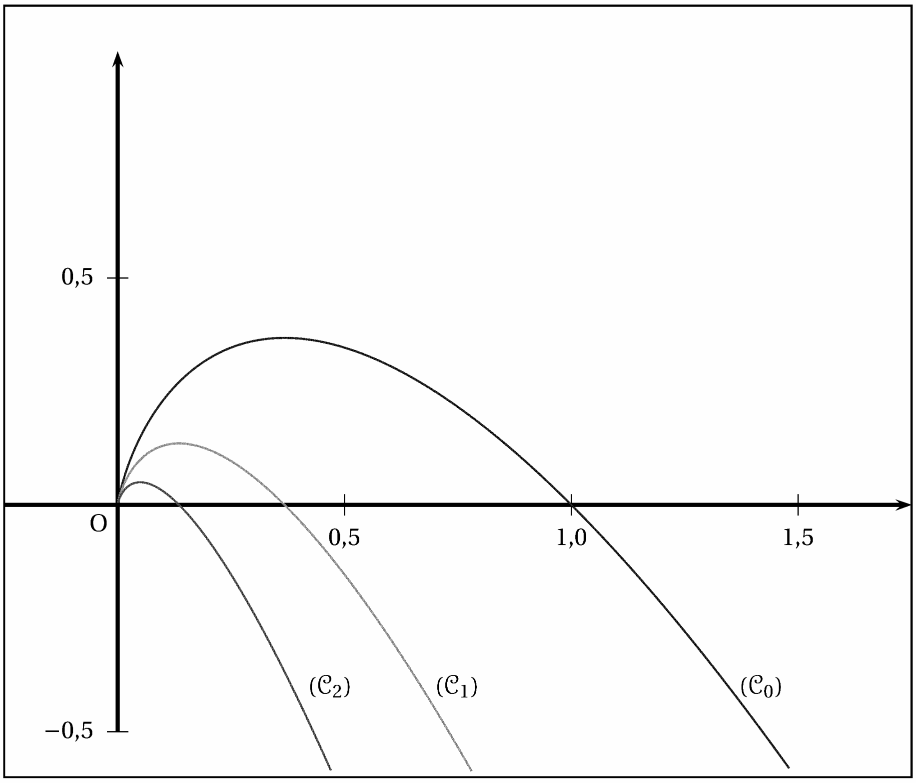
b. En déduire que $I_0 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4e^2}$.

c. On admet que le domaine D_{n+1} est l'image du domaine D_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{e}$.

Exprimer I_1 et I_2 en fonction de I_0.

Cette page sera complétée et remise à la fin de l'épreuve

Exercice 4



CORRECTION

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur]0 ; + ∞ [par $f_0(x) = -x \ln x$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = -\infty$

2. $f'_0(x) = -\ln x - x \times \dfrac{1}{x} = -(\ln x + 1)$ or $\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{e}$ d'où le sens de variation de f'_0

Sur $\left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[$, $f'_0(x) \geq 0$ donc f_0 est croissante sur $\left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[$.

Sur $\left[\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[$, $f'_0(x) \leq 0$ donc f_0 est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

1. pour $x \in\ ]0\,;+\infty[$, $f_n(x) = -n\,x - x \ln x$ donc $f'_n(x) = -n - (\ln x + x \times \dfrac{1}{x})$ soit $f'_n(x) = -n - 1 - \ln x$.

2. *a.* la courbe (C_n) admet en un point une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $f'_n(x) = 0$

$f'_n(x) = -n - 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -n - 1 \Leftrightarrow x = e^{-n-1}$

la courbe (C_n) admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

b. L'ordonnée de A_n est $y_n = f_n(e^{-n-1})$ donc $y_n = -n\,e^{-n-1} - e^{-n-1}\ln(e^{-n-1}) = -n\,e^{-n-1} - e^{-n-1}(-n-1)$

$y_n = -n\,e^{-n-1} + n\,e^{-n-1} + e^{-n-1}$ soit $y_n = e^{-n-1} = x_n$ donc le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.

c. Il suffit de tracer la droite d'équation $y = x$, les points d'intersection avec les courbes C_0 , C_1 et C_2 sont les points A_0, A_1 et A_2

3. *a.* la courbe (C_n) coupe l'axe des abscisses en point d'abscisse x telle que $f_n(x) = 0$

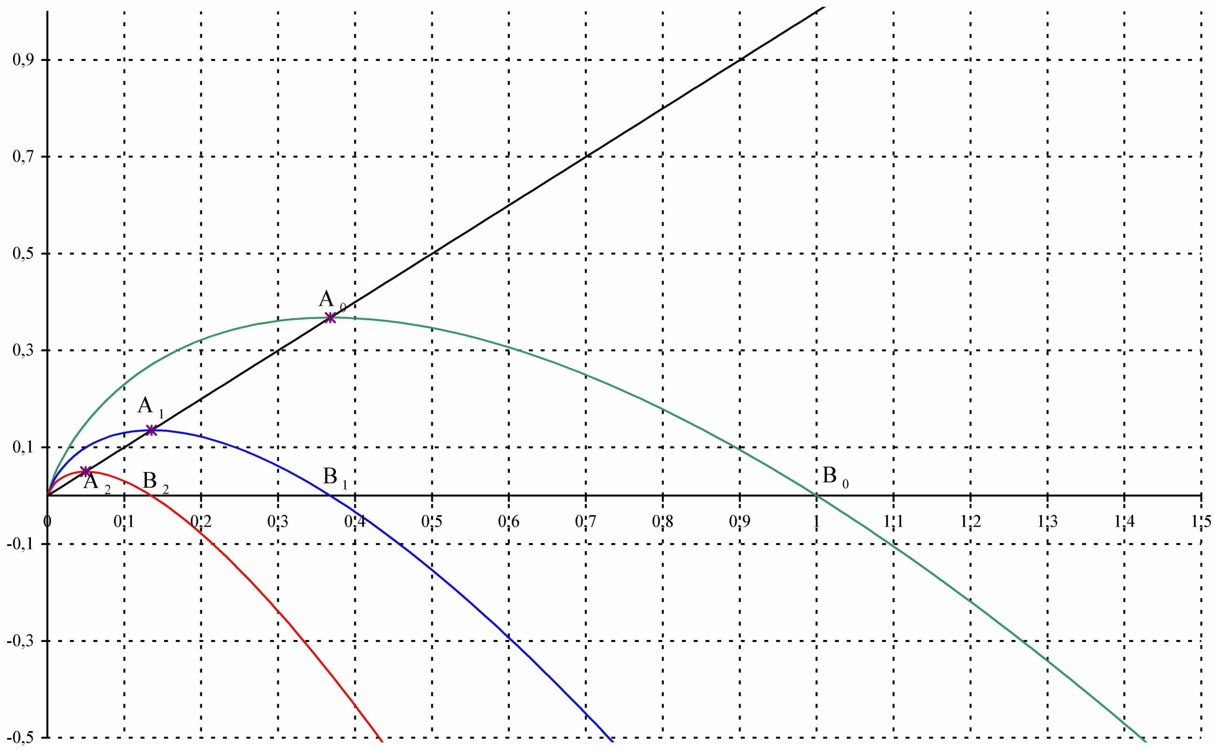
$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow -n\,x - x \ln x = 0$ et $x \in\ ]0\,;+\infty[\ \Leftrightarrow -x(n + \ln x) = 0$ et $x \in\ ]0\,;+\infty[\ \Leftrightarrow \ln x = -n \Leftrightarrow x = e^{-n}$

la courbe (C_n) coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n d'abscisse e^{-n}.

b. la tangente à (C_n) au point B_n a pour coefficient directeur $f'_n(e^{-n})$ or $f'_n(e^{-n}) = -n - 1 - \ln e^{-n} = -n - 1 - (-n) = -1$

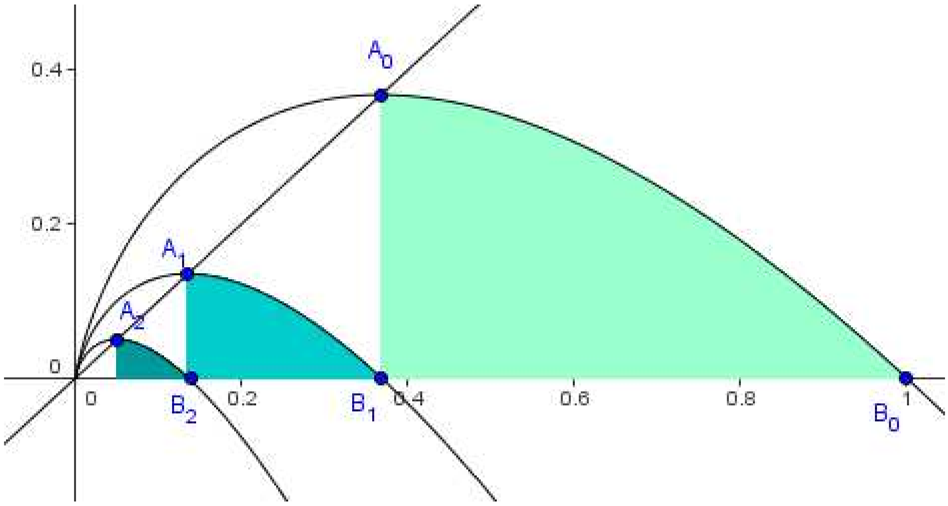
la tangente à (C_n) au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.

c.



Partie C : Calculs d'aires

1.



2. *a.* Soit $u'(x)\ x$ alors $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$; soit $v'(x) = \ln x$ alors $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} x \ln x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2\,e^2} \ln\left(\frac{1}{e}\right) - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{2} x \, \mathrm{d}x \text{ or } \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln e = -1$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\,e^2} - \left[\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{e}}^{1} = \frac{1}{2\,e^2} - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4\,e^2} \right] = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4\,e^2}$$

b. Sur] 0 ; 1]; $f_0(x) > 0$ donc $I_0 = -\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{3}{4\,e^2}$.

c. le domaine D_{n+1} est l'image du domaine D_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{e}$ donc $I_{n+1} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^2 I_n$

$I_1 = \dfrac{1}{e^2} I_0$ et $I_2 = \dfrac{1}{e^2} I_1 = \dfrac{1}{e^4} I_0$.