Antilles Guyane septembre 2016

Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On note C l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z

$$(E) : z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0,$$

où a désigne un nombre réel quelconque.

- Pour toute valeur de a, (E) n'a pas de solution dans C.
- Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans C ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.
- Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans C ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.
- Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.

2. Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0 ; \pi[$ et z le nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$.
Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0 ; \pi[$:

- Le nombre z est un réel positif.
- Le nombre z est égal à 1.
- Un argument de z est θ.
- Un argument de z est $\frac{\theta}{2}$.

3. Soit la fonction f définie et dérivable pour tout nombre réel x par $f(x) = e^{-x} \sin x$.

- La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4} ; +\infty\right[$
- Soit f' la fonction dérivée de f. On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$
- La fonction f est positive sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4} ; +\infty\right[$
- Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$.
  La fonction F est une primitive de la fonction f.

4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 0,02.
0,45 est une valeur approchée à 10^{-2} près de :

- $P(X = 30)$
- $P(X \leq 60)$
- $P(X \leq 30)$
- $P(30 \leq X \leq 40)$

CORRECTION

1. $\Delta = 4a^2 - 4(a^2 + 1) = -4$ donc $\Delta = (2i)^2$

(E) admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-2a + 2i}{2} = -a + i$ et $z_2 = -a - i$

z_1 et z_2 sont conjuguées donc leurs modules sont égaux donc :

- Pour toute valeur de a, (E) n'a pas de solution dans C. **FAUX**
- Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans C ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts. **FAUX**
- Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans C ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux. **VRAI**
- Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle. **FAUX**

2. $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in]0 ; \pi[$ donc $\sin\theta \neq 0$, z n'est pas un nombre réel.

- Le nombre z est un réel positif. **FAUX**
- Le nombre z est égal à 1. **FAUX :**
  $|e^{i\theta}| = 1$ donc $e^{i\theta} \neq 0$ donc $z \neq 1$.
- Un argument de z est θ. **FAUX** si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z = 1 + i$ donc $\arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
- Un argument de z est $\frac{\theta}{2}$. **VRAI**

$$z = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}},\ \theta \in]0 ; \pi[\text{ donc } \cos\frac{\theta}{2} \geq 0 \text{ donc } \arg z = \frac{\theta}{2} \text{ à 2 près}$$

3. $f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

- La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{4}\,;+\infty\right[$. **FAUX**

  $f'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3\pi}{2}}$ et $\dfrac{3\pi}{2} > \dfrac{\pi}{4}$ donc $f'(x)$ n'est pas négative sur $\left]\dfrac{\pi}{4}\,;+\infty\right[$.

- Soit f' la fonction dérivée de f. On a $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ **VRAI**

  $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4}$ donc $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

- La fonction f est positive sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{4}\,;+\infty\right[$ **FAUX**

  La fonction sinus est négative sur $]\pi\,;2\pi]$ donc f est négative sur $]\pi\,;2\pi]$

- Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$.
  La fonction F est une primitive de la fonction f. **FAUX**
  $F'(x) = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2\sin x\, e^{-x}$
  $F'(x) \neq f(x)$ donc F n'est pas une primitive de la fonction f.

4. $P(X \leq t) = 1 - e^{-0{,}02\,t}$ et $P(c \leq X \leq d) = P(X \leq d) - P(X \leq c) = e^{-0{,}02\,c} - e^{-0{,}02\,d}$

0,45 est une valeur approchée à 10^{-2} près de :

- $P(X = 30) = 0$ **FAUX**
- $P(X \leq 60) = 0{,}6988$ **FAUX**
- $P(X \leq 30) = 0{,}4512$ **VRAI**
- $P(30 \leq X \leq 40) = 0{,}0995$ **FAUX**