EXERCICE 1

PARTIE A

1) je calcule $\frac{b(x)}{a(x)}=-\frac{1}{x}$ d'où $\int\frac{b(x)}{a(x)}=-\ln x$ d'où $y=\lambda e^{\ln x}=\lambda x, \lambda\in\mathbb{R}$

2) j'ai $h(x)=-\ln x-1$, je calcule $h'(x)=-\frac{1}{x}$, je remplace dans l'équation (E), je trouve

$x\times\left(-\frac{1}{x}\right)-(-\ln x-1)=-1+\ln x+1=\ln x$

3) j'en déduis les solutions générales de (E), en ajoutant solution homogène (question 1) et solution particulière (question 2):

$$f(x)=\lambda x-\ln x-1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

je veux $f(1)=1\Leftrightarrow\lambda-0-1=1\Leftrightarrow\underline{\lambda=2}$, conclusion:

$$\boxed{f(x)=2x-\ln x-1}$$

PARTIE B

1) • si $x\to0$, alors $2x-1\to-1$ et $-\ln x\to+\infty$ d'où $\boxed{\lim_0 f=+\infty}$

• si $x\to+\infty$, alors $2x-1\to+\infty$ et $-\ln x\to-\infty$ d'où forme indéterminée, on factorise par x,

$f(x)=x\left(\underbrace{2-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}}_{tend\ vers\ 2\ si\ x\to+\infty}\right)$ d'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f=+\infty}$

2) $f'(x)=2-\frac{1}{x}$. Pour étudier le signe de ce genre de chose, une technique qui revient souvent: mettre au même dénominateur : $f'(x)=\frac{2x-1}{x}$.

tableau de variations:

x	0	1/2	$+\infty$
f'(x)	+		−
f	$+\infty$ ↘	ln2	↗ $+\infty$

PARTIE C

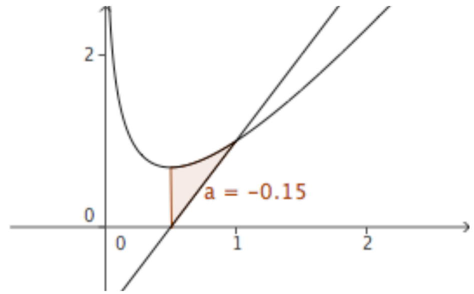
1) on a $f(x)-(2x-1)=-\ln x$, positif entre 0 et 1, et négatif au delà de 1. Donc Cf au dessus de D dans $[0,1]$, en dessous dans $[1;+\infty[$.

2) voir ci dessous

3)a) $H'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$

3)b) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}-\ln x dx=-[x\ln x-x]_{\frac{1}{2}}^{1}=1-\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}=\boxed{\frac{-\ln 2+1}{2}}$ ≈ -0,15342640972

pour l'aire on multiplie par 4x4 donc $A\approx 2{,}4548225555\text{cm}^2$.



EXERCICE 2

PARTIE A

1) Loi normale

Posons $X_0=\frac{X-25}{0,44}$, *alors* X_0 *suit la loi normale centrée réduite N(0,1), celle dont la table figure dans le formulaire.*

t	0,05
0,0	0,519 9
0,1	0,559 6
0,2	0,598 7
0,3	0,636 8
0,4	0,673 6

1) $p(X<25,2)=p\left(X_0<\frac{25,2-25}{0,44}\right)=p(X_0<0,45\,environ)$

soit $p(X<25,2)=\prod(0,45)$

on trouve avec la table $p(X<25,2)=0,6736$

Deuxième probabilité, même principe

$p(24,1<X<25,9)=p(-2,05<X_0<2,05)=2\prod(2,05)-1\approx0,96$

rappels :

Loi normale centrée réduite :
si a>0, alors $p(X<a)=\prod(a)$
si a<0, alors $p(X<a)=1-\prod(-a)$
si a>0, alors $p(-a<X<a)=2\prod(a)-1$
si a<0<b, alors $p(a<X<b)=\prod(-a)+\prod(b)-1$
si 0<a<b, alors $p(a<X<b)=\prod(b)-\prod(a)$
si a<b<0, alors $p(a<X<b)=\prod(-a)-\prod(-b)$

2)a) On répète 150 fois le même événement (tirer une bille), la probabilité d'une bille défectueuse est la même à chaque fois, donc Y suit la loi binômiale.

2)b) la loi binomiale du a) a pour paramètres n=150 et p=0,04, elle peut donc être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda=6$

Poisson approchant binomiale

une loi binomiale B(n,p) peut être approchée raisonnablement par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \cdot p$ à condition que n soit supérieur à 20 (c'est limite) ou 50 (c'est mieux) et que p soit inférieur à 10%. Il faut aussi que *n* fois *p* soit proche d'un entier, sinon le formulaire ne permet pas d'avoir des valeurs par Poisson.

Loi de Poisson
2)b) « au plus 4 billes » cela veut dire, 0,1,2,3 ou 4 billes.
on trouve, en ajoutant tous les nombres ci contre, que cette probabilité d'obtenir au plus 4 billes défectueuses vaut 0,303 soit, si l'on traduit en termes de pourcentages, $p(E_3) = 30,3\%$

k \ λ	6
0	0.002
1	0.015
2	0.045
3	0.089
4	0.134

PARTIE B
1)
H0 "la différence observée est due aux fluctuations d'échantillonnage"
H1 "la différence observée est significativement anormale"

2) $\bar{X}$ suit une loi normale de paramètres $m = 25$ et $\sigma = \dfrac{0,44}{\sqrt{125}} \approx 0,03935$

Échantillonage

si X suit la loi normale $N(m,\sigma)$, si l'on répète K fois l'événement correspondant à la variable X, si $\bar{X}$ désigne la moyenne de X sur ces K répétitions, alors $\bar{X}$ suit la loi normale $N\left(m, \dfrac{\sigma}{\sqrt{K}}\right)$

2)b) On demande de calculer

$$p\left(25 - a \leq \bar{X} \leq 25 + a\right) = 0,95 \Leftrightarrow p\left(\frac{-a}{0,03935} \leq \frac{\bar{X} - 25}{0,03935} \leq \frac{a}{0,03935}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{a}{0,03935}\right) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{a}{0,03935}\right) = 0,975 \Leftrightarrow \frac{a}{0,03935} = 1,96 \Leftrightarrow a \approx 0,077$$

2)c) si 25,1 est dans l'intervalle [25-a;25+a] soit [24,923 ; 25,077], l'hypothèse H0 est bonne, sinon c'est H1
3) il ne peut pas faire confiance à l'entreprise.