1. Définition de la fonction logarithme népérien

Définition : La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

$\exp : \mathbb{R} \to]\,0\,;+\infty\,[$

$a \to e^{a} = b$

$$a = \ln b \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} b = e^{a}$$

$\ln :]\,0\,;+\infty[\, \to \mathbb{R}$

$b \to \ln b = a$

Propriété : Pour tout a de $\mathbb{R}$: $\ln(e^{a}) = a$

Pour tout $b > 0$: $e^{\ln b} = b$

$$a = \ln b = \ln e^{a} \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} b = e^{a} = e^{\ln b}$$

Propriété : Pour tout $a > 0$ et b de $\mathbb{R}$: $b = \ln(a) \Leftrightarrow a = e^{b}$

2. Valeurs particulières : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

3. Sens de variation

Propriété : La fonction ln est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

4. Propriétés algébriques

$a > 0$ et $b > 0$ et n est un entier relatif

Théorème : relation fonctionnelle : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Propriétés

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^{n}) = n \ln a$$

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$$

$$\text{somme} \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} \text{produit}$$

l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles
le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes

5. Equations, inéquations

Propriété

$a > 0$ et $b > 0$: $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

Pour tout réel k, $\ln x = k \Leftrightarrow x = e^{k}$

Si $k > 0$ $e^{x} = k \Leftrightarrow x = \ln k$

Si $k \leq 0$, l'équation $e^{x} = k$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$

Propriété

$a > 0$ et $b > 0$: $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

Propriété

a. k dans $\mathbb{R}$ et $x > 0$: $\ln x < k \Leftrightarrow x < e^{k}$.

b. $\lambda > 0$ et x dans $\mathbb{R}$: $e^{x} < \;\Leftrightarrow x < \ln \lambda$

6. Signe de ln x suivant les valeurs de x

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	‖	négatif	0	positif	

7. Fonction ln

Théorème : La fonction ln est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et, pour $x > 0$, on a $\ln' x = \frac{1}{x}$.

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln' x = \frac{1}{x}$	‖	+		+		+	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

Propriété autres limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ **;** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

On peut retenir les deux limites en remarquant que, pour ces deux formes indéterminées, c'est « x qui l'a emporté sur le logarithme », ce qui n'est pas une démonstration.

Dans les études d'une limite où intervient un logarithme $\ln x$, on utilise les limites du cours en observant la limite de l'expression sur laquelle porte le ln, pour bien savoir quelle limite utiliser.

l'expression tend vers	0	1	$+\infty$
Limites du cours à connaître	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

8. Fonctions composées ln *u*

Définition : ln *u* est définie lorsque la fonction *u* est à valeurs strictement positives.
Variations : ln *u* a les mêmes variations que *u*.
Dérivée : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ sur tout intervalle I où *u* est dérivable et à valeurs strictement positives.

9. La fonction logarithme décimal

On rappelle qu'il suffit de savoir la définition, le reste n'est pas exigible.

Définition : Sur $]\,0\,;+\infty\,[$, la fonction logarithme décimal est notée log et $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Valeurs particulières : log 1 = 0, log 10 = 1.
Propriétés algébriques : analogues à celles de ln.
Variations : log est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme la fonction ln.

Remarque

Pour tout entier relatif k : $\log 10^k = k$.