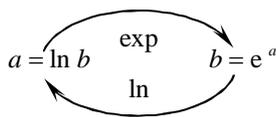


# 1. Définition de la fonction logarithme népérien

**Définition :** La fonction logarithme népérien, notée  $\ln$ , est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0; +\infty[$$

$$a \rightarrow e^a = b$$

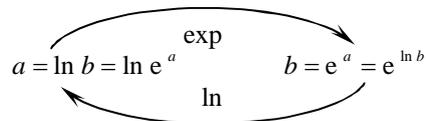


$$\ln : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b \rightarrow \ln b = a$$

**Propriété :** Pour tout  $a$  de  $\mathbb{R} : \ln(e^a) = a$

Pour tout  $b > 0 : e^{\ln b} = b$



**Propriété :** Pour tout  $a > 0$  et  $b$  de  $\mathbb{R} : b = \ln(a) \Leftrightarrow a = e^b$

# 2. Valeurs particulières : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

# 3. Sens de variation

**Propriété :** La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

# 4. Propriétés algébriques

$a > 0$  et  $b > 0$  et  $n$  est un entier relatif

**Théorème : relation fonctionnelle :**  $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

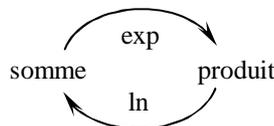
**Propriétés**

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$



l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles  
le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes

# 5. Equations, inéquations

**Propriété**

$a > 0$  et  $b > 0 : \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

Pour tout réel  $k, \ln x = k \Leftrightarrow x = e^k$

Si  $k > 0, e^x = k \Leftrightarrow x = \ln k$

Si  $k \leq 0$ , l'équation  $e^x = k$  n'admet aucune solution dans  $\mathbb{R}$

**Propriété**

$a > 0$  et  $b > 0 : \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

**Propriété**

a.  $k$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x > 0 : \ln x < k \Leftrightarrow x < e^k$ .

b.  $\lambda > 0$  et  $x$  dans  $\mathbb{R} : e^x < \lambda \Leftrightarrow x < \ln \lambda$

# 6. Signe de $\ln x$ suivant les valeurs de $x$

$x$	0	1	$+\infty$
Signe de $\ln x$	négatif	0	positif

# 7. Fonction $\ln$

**Théorème :** La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et, pour  $x > 0$ , on a  $\ln' x = \frac{1}{x}$ .

**Propriété :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$\ln' x = \frac{1}{x}$		+	+	+
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

### Propriété autres limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0 ; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

On peut retenir les deux limites en remarquant que, pour ces deux formes indéterminées, c'est «  $x$  qui l'a emporté sur le logarithme », ce qui n'est pas une démonstration.

Dans les études d'une limite où intervient un logarithme  $\ln x$ , on utilise les limites du cours en observant la limite de l'expression sur laquelle porte le  $\ln$ , pour bien savoir quelle limite utiliser.

l'expression tend vers	0	1	$+\infty$
Limites du cours à connaître	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

### 8. Fonctions composées $\ln u$

**Définition :**  $\ln u$  est définie lorsque la fonction  $u$  est à valeurs strictement positives.

**Variations :**  $\ln u$  a les mêmes variations que  $u$ .

**Dérivée :**  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$  sur tout intervalle  $I$  où  $u$  est dérivable et à valeurs strictement positives.

### 9. La fonction logarithme décimal

On rappelle qu'il suffit de savoir la définition, le reste n'est pas exigible.

**Définition :** Sur  $]0 ; +\infty[$ , la fonction logarithme décimal est notée  $\log$  et  $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ .

**Valeurs particulières :**  $\log 1 = 0$ ,  $\log 10 = 1$ .

**Propriétés algébriques :** analogues à celles de  $\ln$ .

**Variations :**  $\log$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$  comme la fonction  $\ln$ .

#### Remarque

Pour tout entier relatif  $k$  :  $\log 10^k = k$ .