Liban Juin 2007

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.

On note C et C ′ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal. Les courbes C et C ′ sont données en annexe.

1. *a.* Étudier le signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

b En déduire la position relative des deux courbes C et C ′ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. Pour x appartenant à $]\,0\,;+\infty\,[$, M est le point de C d'abscisse x et N est le point de C ′ de même abscisse.

a. Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Étudier les variations de la fonction h sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

b. En déduire que sur l'intervalle [1 ; e], la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.

c. Résoudre dans $]\,0\,;+\infty\,[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.

d. En déduire que, sur $]\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$, il existe deux réels a et b ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1.

3. *a.* A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x$.

b. Vérifier que la fonction G définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $G(x) = x\,[\,(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\,]$ est une primitive de la fonction g sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

c. On considère la partie du plan délimitée par les courbes C , C et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Déterminer l'aire A en unités d'aire de cette partie du plan.

EXERCICE 2 5 points Candidats ne faisant pas l'option mathématiques

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est : $\begin{cases} x = 2 - \dfrac{t}{2} \\ y = 1 \\ z = 5 - \dfrac{3t}{2} \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

On note A le point de coordonnées (2 ; − 1 ; 1), B le point de coordonnées (4 ; − 2 ; 2) et C le point de (d) d'abscisse 1.

1. **Proposition 1 :** « La droite (d) est parallèle à l'axe $(\mathrm{O}\,;\vec{j})$ ».

2. **Proposition 2 :** « Le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ est le plan passant par A et orthogonal à (d) ».

3. **Proposition 3 :**« La mesure de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est $\dfrac{\pi}{3}$ radians ».

4. Soit G le barycentre des points pondérés (A ; −1), (B; 1) et (C; 1).

Proposition 4 : « Les segments [AG] et [BC] ont le même milieu ».

5. **Proposition 5** : « La sphère de centre C et passant par B coupe le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ ».

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant choisi l'option mathématiques

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2\,\mathrm{i}\,z + 1$.

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}\,\mathrm{i}$, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$.

Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées (− 1 ; 0 ; 5) et de rayon 5 ».

3. **Proposition 3 :** « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

4. **Proposition 4 :** « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et de $4n + 3$ est égal à 7 ».

5. Soient a et b deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

On considère deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n ($n \geq 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape ($n - 1$) est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape ($n - 1$) est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité.

On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.

2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0{,}8\, p_n + 0{,}05$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer p_3.

4. *a.* Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0{,}25$.

b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.

d. Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0{,}8\,\ell + 0{,}05$. En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{z}{|z|}(2 - |z|)$.

Le cercle $\mathcal{C}_1$, de centre O et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Pour z complexe non nul, on note $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, r étant le module de z et α un argument de z.

1. Montrer que $z' = (2 - r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

2. Déterminer l'affixe a' du point A′, image par f du point A d'affixe $a = 3$.

3. Soit B le point d'affixe $b = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

a. Écrire b sous forme exponentielle.

b. Déterminer l'affixe b' du point B′, image du point B par f.

4. Placer A, B, A′ et B′ sur la figure.

5. *a.* Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O.

b. Représenter E sur la figure.

6. Montrer que le cercle $\mathcal{C}_1$ est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que f (M) = M.

7. Pour cette question, M est un point du plan, distinct de O, n'appartenant pas au cercle $\mathcal{C}_1$.

On appelle I le milieu du segment [MM′] où M′ est l'image de M par f.

a. Montrer que I appartient à $\mathcal{C}_1$.

b. Montrer que I appartient à la demi-droite [OM).

c. Sur la figure donnée en annexe est placé un point nommé M_1. Construire le point M'_1, image par f du point M_1.

CORRECTION

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.

On note C et C ′ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal. Les courbes C et C ′ sont données en annexe.

1. *a.* $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow 0 < x < \mathrm{e}$

x	0		1		e		+ ∞
$\ln x$	‖	–	0	+		+	
$1 - \ln x$	‖	+		+	0	–	
$(\ln x)(1 - \ln x)$	‖	–	0	+	0	–	

b Pour connaitre la position relative des deux courbes C et C ′ sur] 0 ; + ∞ [, il suffit de connaitre le signe de $f(x) - g(x)$ donc de $(\ln x)(1 - \ln x)$.

x	0		1		e		+ ∞
$(\ln x)(1 - \ln x)$	‖	–	0	+	0	–	
position relative	‖	C est en dessous de C'	point d'intersection	C est au dessus de C'	point d'intersection	C est en dessous de C'	

2. *a.* h est définie continue dérivable sur] 0 ; + ∞ [(différence de deux fonctions définies continues dérivable sur] 0 ; + ∞ [)

$h'(x) = \dfrac{1}{x} - 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x = \dfrac{1-2\ln x}{x}$ donc $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{\mathrm{e}}$

h est donc croissante sur $]0 ; \sqrt{\mathrm{e}}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\mathrm{e}} ; +\infty[$, h admet donc un minimum en $\sqrt{\mathrm{e}}$.

b. $1 < \sqrt{\mathrm{e}} < \mathrm{e}$ or sur [1 ; e] C est au dessus de C' donc MN = $f(x) - g(x) = h(x)$

sur l'intervalle [1 ; e], la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.

c. Soit X = ln x, $(\ln x)^2 - \ln x = 1 \Leftrightarrow X^2 - X - 1 = 0$ et X = ln x ⇔ $X_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $X_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ avec X = ln x

$\Leftrightarrow x_1 = \exp\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ ou $x_2 = \exp\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

d. Sur] 0 ; 1 [∪] e ; + ∞ [, C est en dessous de C' donc MN = $g(x) - f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$

L'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$ est équivalente à l'équation MN = 1 donc il existe deux réels a et b ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1 avec $a = \exp\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $b = \exp\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3. *a.* Soit $\begin{cases} u'(x) = 1 & \text{alors} \quad u(x) = x \\ v(x) = \ln x & \text{alors} \quad v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ donc $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = [\,x\ln x\,]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$

b. La fonction G définie sur] 0 ; + ∞ [par $G(x) = x\,[\,(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\,]$ est définie continue dérivable sur] 0 ; + ∞ [

$G'(x) = [\,(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\,] + x\left(2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x - \dfrac{2}{x}\right) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + 2\ln x - 2$

$G'(x) = (\ln x)^2$ donc G est une primitive de la fonction g sur] 0 ; + ∞ [.

c. sur [1 ; e] C est au dessus de C' donc l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes C , C et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est A = $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [\,f(x) - g(x)\,]\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x = 1 - [G(\mathrm{e}) - G(1)]$

$G(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\,[\,(\ln \mathrm{e})^2 - 2\ln \mathrm{e} + 2\,] = \mathrm{e}$ et $G(1) = 2$ donc A = 1 – e + 2 = 3 – e unités d'aires.

EXERCICE 2 5 points Candidats ne faisant pas l'option mathématiques

1. Proposition 1 : FAUSSE

$\vec{j}$ a pour coordonnées (0 ; 1 ; 0).

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}$ de coordonnées $\left(-\frac{1}{2} ; 0 ; -\frac{3}{2}\right)$ donc $\vec{u}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires donc la droite (d) n'est pas parallèle à l'axe (O ; $\vec{j}$) ».

2. Proposition 2 : VRAIE

Le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; 0 ; 3) or $2\vec{u} = -\vec{n}$ donc le plan P et orthogonal à (d).
A est le point de coordonnées (2 ; − 1 ; 1), $2 + 3 \times 1 - 5 = 0$ donc P est le plan passant par A.

3. Proposition 3 : FAUSSE

C est le point de (d) d'abscisse 1 donc $t = 2$ et C a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2)
$AB^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6$ et $AC^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$ et $BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$

Le triangle ABC est isocèle en A et pas équilatéral donc la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ n'est pas $\frac{\pi}{3}$ radians.

4. Proposition 4 : VRAIE

Soit I le milieu de [BC] alors comme G est le barycentre des points pondérés (A ; −1), (B; 1) et (C; 1), G est le barycentre des points pondérés (A ; −1), (I; 2), donc $-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ donc I est le milieu de [AG]

5. Proposition 5 : VRAIE

Le rayon de la sphère est BC = $3\sqrt{2}$, la distance de C au plan P est $d = \frac{|x_C + 3z_C - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|1 + 6 - 5|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$R^2 = 18$ et $d^2 = 0{,}4$ donc $R < d$ et La sphère de centre C et passant par B coupe le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$.

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant choisi l'option mathématiques

1. Proposition 1 : VRAIE

La transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2\text{ i } z + 1$ a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$ donc est une similitude directe de rapport $|\,a\,|$ donc 2 et d'angle arg a donc $\frac{\pi}{2}$.

L'image de A est le point d'affixe $z' = 2\text{ i}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\text{i}\right) + 1 = 1-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\text{i}$ donc $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\text{i}$

Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\text{i}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2.

2. Proposition 2 : FAUSSE

$M \in S \cap P \Leftrightarrow z = x^2 + 2x + y^2 + 1$ et $z = 5 \Leftrightarrow 5 = x^2 + 2x + y^2 + 1$ et $z = 5 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 5$ et $z = 5$

La section de S avec le plan P d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1 ; 0 ; 5)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

3. Proposition 3 : VRAIE

$5^2 = 25 = 7\ 3 + 4$ donc $5^2 \equiv 4\ [7]$ donc $5^3 \equiv 20\ [7]$ or $20 = 2 \times 7 + 6$ donc $5^3 \equiv 6\ [7]$

$5^4 \equiv 30\ [7]$ or $30 = 4\ 7 + 2$ donc $5^4 \equiv 2\ [7]$

$5^5 \equiv 10\ [7]$ or $10 = 7 + 3$ donc $5^5 \equiv 3\ [7]$

$5^6 \equiv 15\ [7]$ or $15 = 2 \times 7 + 1$ donc $5^6 \equiv 1\ [7]$

$750 = 6 \times 125$ donc $[5^6]^{125} \equiv 1^{125}\ [7]$ soit $5^{6 \times 125} \equiv 1\ [7]$ donc $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

4. Proposition 4 : VRAIE

$n \equiv 1$ modulo 7 donc $3\,n \equiv 3$ modulo 7 donc $3\,n + 4 \equiv 0$ modulo 7 donc 7 divise $3\,n + 4$

$n \equiv 1$ modulo 7 donc $4\,n \equiv 4$ modulo 7 donc $4\,n + 3 \equiv 0$ modulo 7 donc 7 divise $4\,n + 3$

7 divise $3\,n + 4$ et 7 divise $4\,n + 3$ donc 7 divise le PGCD de $3\,n + 4$ et de $4\,n + 3$

$4\,(3\,n + 4) - 3\,(4\,n + 3) = 16 - 9 = 7$ donc le PGCD de $3\,n + 4$ et de $4\,n + 3$ divise 7 alors le PGCD de $3\,n + 4$ et de $4\,n + 3$ est égal à 7.

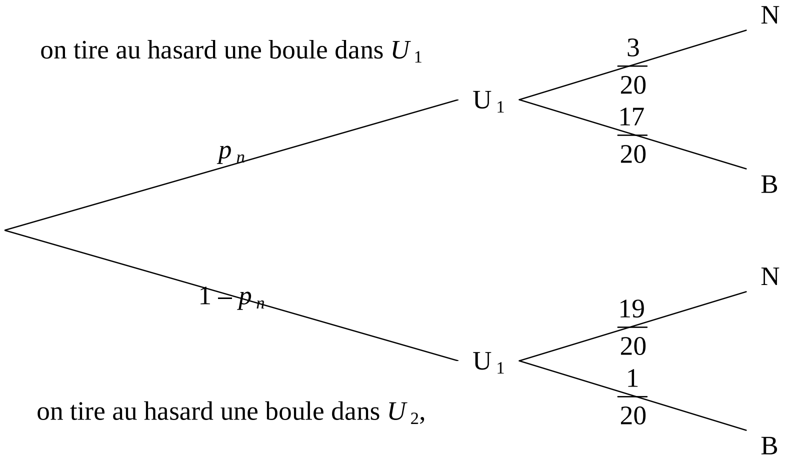
5. Proposition 5 : FAUSSE

3 et 5 sont premiers entre eux et $5 \times 3 + 1 \times (-1) = 2$ donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que $5\,u + 3\,v = 2$ et le PGCD de a et b est différent de 2.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

1. p_2 est la probabilité de l'événement : l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_2 à l'étape 2 » donc on a obtenu à l'étape 1 une boule noire donc $p_2 = \dfrac{17}{20}$

2.



pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = p_n \times \dfrac{17}{20} + (1 - p_n) \times \dfrac{1}{20} = \dfrac{16}{20} p_n + \dfrac{1}{20}$ donc $p_{n+1} = 0,8\, p_n + 0,05$.

3. $p_3 = 0,8\, p_2 + 0,05 = 0,73$

4. *a.* Montrons par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.
$p_1 = 1$ donc $p_1 > 0,25$, la propriété est vraie pour la plus petite valeur non nulle de n.
Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout n de N, si $p_n > 0,25$ alors $p_{n+1} > 0,25$
$p_n > 0,25$ donc $0,8 \times p_n > 0,8 \times 0,25$ soit $0,8\, p_n > 0,2$ donc $0,8\, p_n + 0,05 > 0,25$ soit $p_{n+1} > 0,25$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b. $p_{n+1} - p_n = 0,8\, p_n + 0,05 - p_n = -0,2\, p_n + 0,05$ or $p_n > 0,25$ donc $-0,2\, p_n + 0,05 < 0$ donc $p_{n+1} - p_n < 0$
La suite (p_n) est décroissante.

c. La suite (p_n) est décroissante, minorée par 0,25 donc la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ et $\ell \geq 025$.

d. $\left\{\begin{array}{l}\text{la fonction } f(x) = 0,8\,x + 0,05 \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ p_{n+1} = f(p_n) \\ \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ p_n \text{ appartient à } \mathbb{R} \\ \text{la suite } p \text{ est convergente vers } \ell\end{array}\right.$ donc ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\,\ell + 0,05$.

$0,2\,\ell = 0,05$ donc $\ell = 0,25$.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z}{|z|}(2 - |z|)$.

Le cercle C_1, de centre O et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
Pour z complexe non nul, on note $z = r\,e^{i\alpha}$, r étant le module de z et α un argument de z.

1. Si $z = r\,e^{i\alpha}$, r étant le module de z alors $\frac{z}{|z|} = e^{i\alpha}$ donc $z' = \frac{z}{|z|}(2 - |z|) = e^{i\alpha}(2 - r)$

2. Si $a = 3$ alors $|a| = 3$ donc l'affixe a' du point A′, image par f du point A est $a' = 1\,(2 - 3) = -1$

3. *a.* $b = -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b. $|b| = 2$ donc l'affixe b' du point B′, image du point B par f est $b' = e^{i\alpha}(2 - r) = 0$ donc B' = O

4.

5. *a.* Le point M du plan privé du point O a pour image par f le point O $\Leftrightarrow z \neq 0$ et $\frac{z}{|z|}(2 - |z|) = 0 \overset{\text{car } z \neq 0}{\Leftrightarrow} 2 - |z| = 0 \Leftrightarrow |z| = 2$

$\Leftrightarrow$ OM = 2 $\Leftrightarrow$ M décrit le cercle de centre O de rayon 2

6. $f(M) = M \Leftrightarrow z \neq 0$ et $z' = z \Leftrightarrow z \neq 0$ et $\frac{z}{|z|}(2 - |z|) = z \overset{\text{car } z \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|z|}(2 - |z|) = 1 \overset{\text{car } z \neq 0}{\Leftrightarrow} 2 - |z| = |z| \Leftrightarrow |z| = 1$

$\Leftrightarrow$ OM = 1 $\Leftrightarrow$ M $\in C_1$

7. *a.* Soit z complexe non nul affixe de M, r étant le module de z et α un argument de z, alors $z = r\,e^{i\alpha}$.
le milieu I du segment [MM′] a pour affixe $z_I = \frac{1}{2}(z + z') = \frac{1}{2}[\,r\,e^{i\alpha} + e^{i\alpha}(2 - r)]$
$z_I = e^{i\alpha}$ donc $|z_I| = 1$ soit OI = 1 donc I appartient à C_1.

b. $z_I = e^{i\alpha}$ et $z = r\,e^{i\alpha}$ donc $z = r\,z_I$ donc $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{OI}$, $r > 0$ donc I appartient à la demi-droite [OM).

c. Pour construire le point M'_1, image par f du point M_1.
construire la demi-droite $[OM_1)$ cette demi-droite coupe le cercle C_1 en un seul point I
I est le milieu de $[M_1M'_1]$ donc M'_1 est le symétrique de M par rapport à I