

Polynésie juin 2008

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Proposition 1 : « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. »
2. Soit x un entier relatif. Proposition 2 : « $x^2 + x + 3 = 0$ (modulo 5) si et seulement si $x = 1$ (modulo 5). »
3. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$. Proposition 3 : « Si N est divisible par 7 alors $a + b$ est divisible par 7. »
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $1 - i$ a pour écriture complexe $z' = (\sqrt{3} + i)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$. »
5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère un point A . On désigne par a son affixe. On note s la réflexion d'axe $(O; \vec{u})$ et s_A la symétrie centrale de centre A .
Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_A = s_A \circ s$ est l'ensemble des nombres réels. »

CORRECTION

1. **VRAIE** : d'après le théorème de Bézout, puisque $(2n + 1) - 2 \times n = 1$ alors pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2. **FAUSSE** : si $x = 3$, $x^2 + x + 3 = 15$ donc $x^2 + x + 3 \equiv 0$ (modulo 5) or 3 n'est pas congru à 1 modulo 5
3. **VRAIE** : $N = 7 + 10a + 100b + 1000a$
or $10 \equiv 3$ (modulo 7) donc $100 \equiv 2$ (modulo 7) et $1000 \equiv 6$ (modulo 7)
donc $N \equiv 3a + 2b + 6a$ (modulo 7)
 $N \equiv 9a + 2b$ (modulo 7) soit $N \equiv (2a + b)$ (modulo 7)
 7 divise $N \Leftrightarrow 7$ divise $2(a + b)$ or 2 et 7 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 7 divise $a + b$
4. **FAUSSE** : L'écriture complexe de la similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $1 - i$ est :
 $z' - (1 - i) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) (z - (1 - i))$ soit $z' = (\sqrt{3} + i)z - \sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})$
Ce qu'on aurait aussi pu vérifier en remarquant que dans l'écriture proposée, le centre de la similitude n'était pas invariant.
5. **VRAIE** : soit B le point d'affixe z
 B est transformé en B' d'affixe $2a - z$ par la symétrie s_A
 B' est transformé en B'' d'affixe $2\overline{a} - \overline{z}$ par la symétrie s
 B est transformé en M' d'affixe $\overline{z}$ par la symétrie s
 B' est transformé en M'' d'affixe $2a - \overline{z}$ par la symétrie s_A
 $s \circ s_A = s_A \circ s \Leftrightarrow$ pour tout point B du plan, $B'' = M'' \Leftrightarrow 2\overline{a} - \overline{z} = 2a - \overline{z} \Leftrightarrow a = \overline{a} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$
L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_A = s_A \circ s$ est l'ensemble des nombres réels.