L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C et I de coordonnées respectives $(-1 ; 2 ; 1)$, $(1 ; -6 ; -1)$, $(2 ; 2 ; 2)$ et $(0 ; 1 ; -1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les trois points A, B et C.
2. Q est le plan d'équation $x + y - 3z + 2 = 0$ et Q' le plan de repère $(O ; \vec{i}, \vec{k})$.

a. Pourquoi Q et Q' sont-ils sécants ?

b. Déterminer un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ intersection des plans Q et Q'.

3. Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.
4. On considère les points J et K de coordonnées respectives $(-2 ; 0 ; 0)$ et $(1 ; 0 ; 1)$.
Déterminer avec soin l'intersection de la sphère S et de la droite (JK)

CORRECTION

1. P est un plan donc *a* une équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$

$A \in P$ donc $-a + 2b + c + d = 0$ $B \in P$ donc $a - 6b - c + d = 0$ $C \in P$ donc $2a + 2b + 2c + d = 0$

On obtient donc le système : $\begin{cases} -a + c + d = -2b \\ a - c + d = 6b \\ a + c + 0{,}5\,d = -b \end{cases}$

En additionnant les lignes L_1 et L_2 le système devient : $\begin{cases} -a + c + d = -2b \\ 2d = 4b \\ a + c + 0{,}5\,d = -b \end{cases}$

soit en remplaçant le système $\begin{cases} -a + c + 2b = -2b \\ d = 2b \\ a + c + b = -b \end{cases}$ donc $\begin{cases} -a + c = -4b \\ d = 2b \\ a + c = -2b \end{cases}$

En additionnant les lignes L_1 et L_3 le système devient : $\begin{cases} a + c = -2b \\ d = 2b \\ 2c = -6b \end{cases}$

donc $d = 2b$; $c = -3b$ et en remplaçant : $a - 3b = -2b$ donc $a = b$

Le plan *a* donc pour équation : $bx + by - 3bz + 2b = 0$ soit $b(x + y - 3z + 2) = 0$ donc $x + y - 3z + 2 = 0$

2. *a*. Un vecteur normal à Q est $\vec{n}(1 ; 1 ; -3)$

Un vecteur normal à Q' est $\vec{j}(0 ; 1 ; 0)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc Q et Q' ne sont pas parallèles donc sont sécants.

b. Soit E le point de $Q \cap Q'$ d'abscisse 0 ; $E \in Q$ donc $y - 3z + 2 = 0$ donc $3z = y + 2$

$E \in Q'$ donc $y = 0$ donc E a pour coordonnées : $x = 0$; $y = 0$; $z = \frac{2}{3}$.

Soit F le point de $Q \cap Q'$ de cote 0 ; $F \in Q$ donc $x + y + 2 = 0$ donc $x = -y - 2$

$F \in Q'$ donc $y = 0$ donc F a pour coordonnées : $x = -2$; $y = 0$; $z = 0$.

Un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{FE}$ de coordonnées $(2 ; 0 ; \frac{2}{3})$ donc un vecteur directeur de Δ est $\vec{u} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FE}$.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $(3 ; 0 ; 1)$

3. S est l'ensemble des points tels que IM = 2

$IM^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 2 = 0$

4. (JK) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{KM} = k\,\overrightarrow{JK}$

$\overrightarrow{JK}$ a pour coordonnées $(3 ; 0 ; 1)$ donc M a pour coordonnées $\begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = 0 \\ z = k + 1 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$M \in S$ donc $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$ et $M \in (JK)$ donc $(3k + 1)^2 + 0 + (k + 1)^2 = 4$

soit $10k^2 + 8k - 2 = 0$ donc $5k^2 + 4k - 1 = 0$. Les solutions sont $k = -1$ et $k = \frac{1}{5}$

Les points d'intersection de S et de (JK) sont donc les points $M_{-1}(-2 ; 0 ; 0)$ obtenu pour $k = -1$ et $M_{0,2}(1{,}6 ; 0 ; 1{,}2)$ obtenu pour $k = \frac{1}{5} = 0{,}2$.