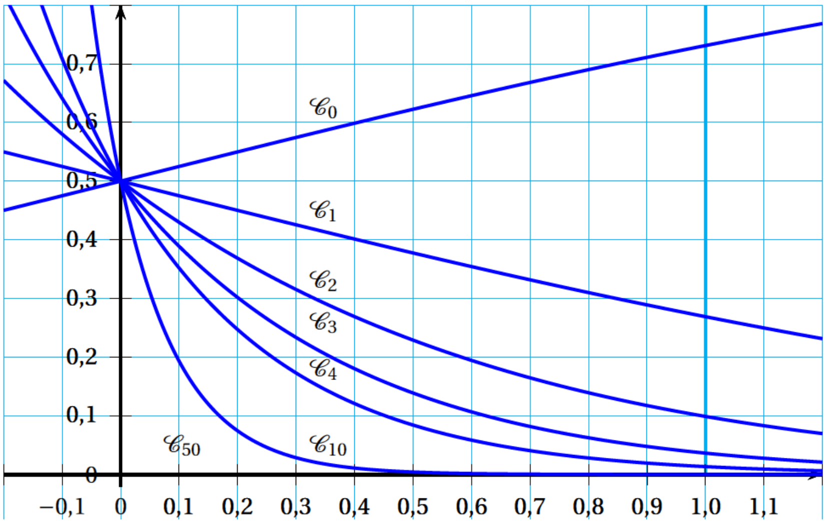
Antilles Guyane septembre 2016

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\dfrac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x}$.

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On a représenté ci-dessous les courbes C_n pour différentes valeurs de n.



Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A - Étude graphique

1. Donner une interprétation graphique de u_n.
2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
3. Proposer, à l'aide du graphique et en expliquant la démarche, un encadrement de u_4 d'amplitude 0,05.

Partie B - Étude théorique

1. Montrer que $u_0=\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0+u_1=1$ puis en déduire u_1.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n\geq 0$.
4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$.
a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $d_n(x)=e^{-nx}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.
b. Étudier le signe de la fonction d_n sur l'intervalle $[0\,;1]$.
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_n+u_{n+1}=\dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
b. En déduire la valeur de ℓ.
c. On souhaite construire un algorithme qui affiche la valeur de u_N pour un entier naturel N non nul donné.
Recopier et compléter les quatre lignes de la partie Traitement de l'algorithme suivant :

Entrée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel K est un entier naturel
Initialisation :	Affecter 1 à K Affecter $1-\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$ à U
Traitement :	Demander à l'utilisateur la valeur de N Tant que K < N Affecter .... à U Affecter .... à K Fin Tant que
Sortie :	Afficher U

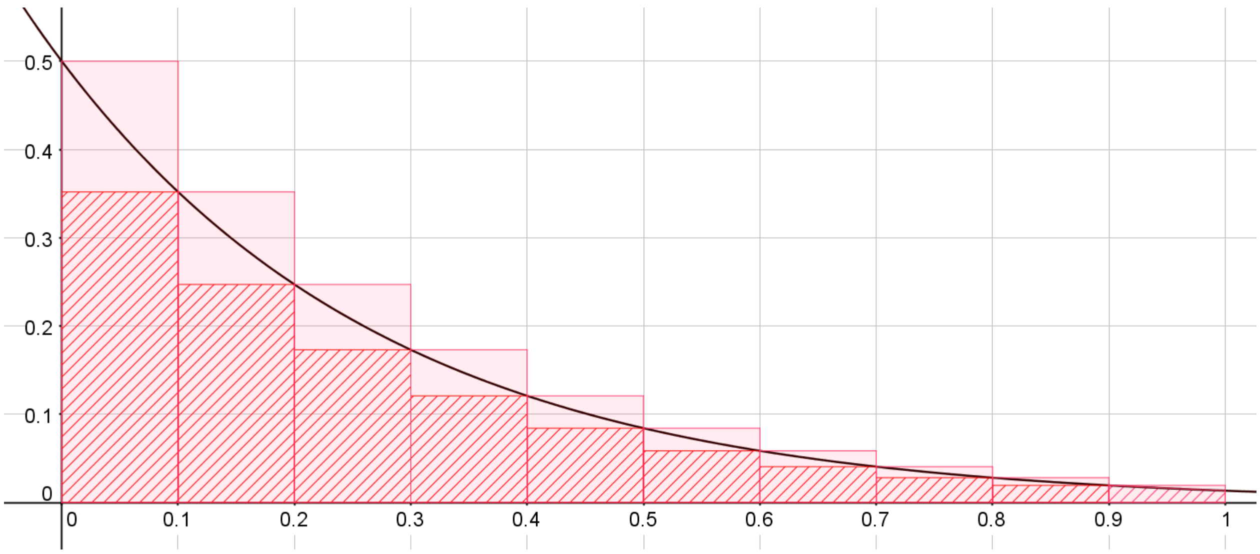
CORRECTION

Partie A - Étude graphique

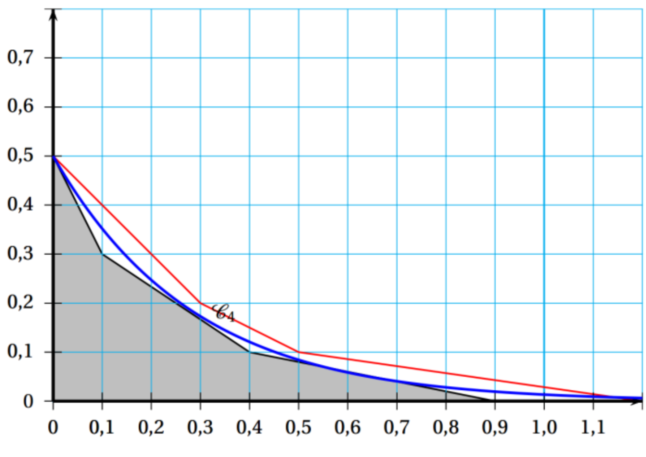
1. La fonction exponentielle est continue, strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f_n continue, strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc u_n est l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C_n les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. Graphiquement, C_{n+1} est en dessous de C_n donc la suite (u_n) est décroissante
Elle semble converger vers 0.

3. u_4 est l'aire d'un domaine qui est comprise entre la somme S des aires de rectangles « trop grands » (en rose sur le graphique) et la somme s des aires de rectangles « trop petits » (hachurés sur le graphique).
$S = 0{,}1\, f(0) + 0{,}1\, f(0{,}1) + 0{,}1\, f(0{,}2) + \dots + 0{,}1\, f(0{,}9) = 0{,}1\, [f(0) + f(0{,}1) + \dots + f(0{,}9)]$
$s = 0{,}1\, f(0{,}1) + 0{,}1\, f(0{,}2) + \dots + 0{,}1\, f(0{,}9) + 0{,}1\, f(1) = 0{,}1\, [f(0{,}1) + \dots + f(0{,}9) + f(1)]$
$f(0{,}1) + \dots + f(0{,}9) = 1{,}12385$
donc $S = 0{,}1\, (0{,}5 + 1{,}123848665) = 0{,}162384866$
$s = 0{,}1\, [1{,}12385 + 0{,}013389805) = 0{,}113723847$ donc $0{,}113 < 0{,}113723847 \leq u_4 \leq 0{,}162384866 < 0{,}163$
$0{,}163 - 0{,}113 = 0{,}05$ donc on a bien un encadrement de u_4 égal à 0,05



On aurait pu aussi utiliser une décomposition en utilisant des trapèzes



Partie B - Étude théorique

1. $u_0 = \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]_0^1$ donc $u_0 = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

2. $u_0 + u_1 = \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

$u_0 + u_1 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1$ donc $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

3. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout entier naturel n, et pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, $f_n(x) > 0$ donc $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ donc $u_n \geq 0$.

4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

a. $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{x}} - \dfrac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx} - \mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx} - \mathrm{e}^{-nx+x}}{1+\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}(1-\mathrm{e}^{x})}{1+\mathrm{e}^{x}}$

b. si $0 \leq x \leq 1$ alors $1 \leq \mathrm{e}^{x} \leq \mathrm{e}$ donc $1 - \mathrm{e}^{x} \leq 0$ et $1 + \mathrm{e}^{x} > 0$ donc, sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $d_n(x) \leq 0$

5. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $d_n(x) \leq 0$, donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ donc $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$

soit $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc est convergente.

6. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

a. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$f_{n+1}(x) + f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{x}} + \frac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^{x}} = \frac{\mathrm{e}^{-nx} + \mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^{x}} = \frac{\mathrm{e}^{-nx} + \mathrm{e}^{-nx+x}}{1+\mathrm{e}^{x}} = \frac{\mathrm{e}^{-nx}(1+\mathrm{e}^{x})}{1+\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e}^{-nx}$$

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) + f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n + u_{n+1}\right) = 2\ell$ donc $\ell = 0$

c. Puisque $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$ alors $u_{n+1} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} - u_n$ donc :

Traitement :	Tant que K < N Affecter $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-K}}{K} - U$ à U Affecter K + 1 à K Fin Tant que
Sortie :	Afficher U