Un triangle ABC de périmètre 12 est isocèle en A. On note AB = AC = x et BC = y.
On cherche à déterminer x et y pour que l'aire du triangle ABC soit maximale.

1. *a.* Justifier que $2x + y = 12$ et que $y < 2x$

b. En déduire que $3 \leq x \leq 6$.

2. Exprimer en fonction de x la hauteur du triangle issue de A.

3. Démontrer que l'aire $f(x)$ du triangle ABC est donné par :

$$f(x) = (6 - x)\sqrt{12x - 36}$$

4. *a.* Démontrer que pour tout réel x appartenant] 3 ; 6] on a :

$$f'(x) = \frac{-18x + 72}{\sqrt{12x - 36}}$$

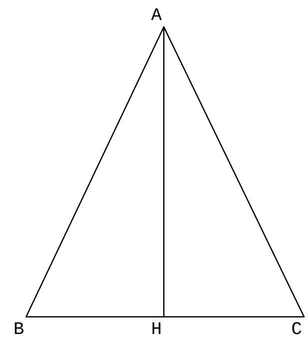
b. En déduire que la fonction f admet sur [3 ; 6] un maximum pour une valeur de x que l'on précisera.

5. Quelle est la nature du triangle d'aire maximale ? Préciser son aire.

CORRECTION

1. *a.* Le triangle ABC est de périmètre 12 donc AB + AC + BC = 12
On note AB = AC = x et BC = y donc $2x + y = 12$
La plus courte distance entre deux points est la ligne droite donc : BC ≤ BA + AC soit $y \leq 2x$.

b. $y \leq 2x$ donc, en ajoutant $2x$ aux deux membres de l'inégalité : $y + 2x \leq 2x + 2x$
or $2x + y = 12$ donc $12 \leq 4x$ soit $3 \leq x$
y est une longueur donc $y \geq 0$ donc $2x + y \geq 2x$ or $2x + y = 12$ donc $12 \geq 2x$ soit $x \leq 6$, donc $3 \leq x \leq 6$.



2. Soit H le pied de la hauteur issue de A.
Le triangle ABC est isocèle donc H est le milieu de [BC], le triangle ABH est rectangle en H donc $AB^2 = AH^2 + HB^2$ (théorème de Pythagore).

$x^2 = AH^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$ or $y = 12 - 2x$ donc $\frac{y}{2} = 6 - x$

$AH^2 = x^2 - (6 - x)^2 = x^2 - (36 - 12x + x^2)$

$AH^2 = 12x - 36$ donc $AH = \sqrt{12x - 36}$

3. L'aire $f(x)$ du triangle ABC est donné par : $\frac{1}{2}$ AH × BC avec BC = $y = 12 - 2x$ et AH = $\sqrt{12x - 36}$

soit $\frac{1}{2} \times 2(6 - x) \times \sqrt{12x - 36} = (6 - x)\sqrt{12x - 36}$

4. *a.* Soit $\begin{cases} u(x) = 6 - x & u'(x) = -1 \\ v(x) = \sqrt{12x - 36} & v'(x) = \dfrac{12}{2\sqrt{12x - 36}} = \dfrac{6}{\sqrt{12x - 36}} \end{cases}$

$f'(x) = -\sqrt{12x - 36} + (6 - x)\dfrac{6}{\sqrt{12x - 36}} \Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{12x - 36}{\sqrt{12x - 36}} + \dfrac{6(6 - x)}{\sqrt{12x - 36}} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-12x + 36 + 36 - 6x}{\sqrt{12x - 36}}$

donc $f'(x) = \dfrac{-18x + 72}{\sqrt{12x - 36}}$

b. $f'(x) = \dfrac{18(-x + 4)}{\sqrt{12x - 36}}$

Sur [3 ; 4], $4 - x \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur [3 ; 4],
Sur [4 ; 6], $4 - x \leq 0$ donc $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur [4 ; 6],
f admet sur [3 ; 6] un maximum en 4.

5. Si $x = 4$ alors $y = 12 - 2x = 4$ donc le triangle ABC est équilatéral, son aire est $f(4) = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$