Asie juin 2013

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

– évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
– évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
– évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

2. *a.* Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?

b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.

Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».

Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.

On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par : $f(x) = e^{x}$ et $g(x) = 1 - e^{-x}$.

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement C_f et C_g, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note D l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b.

1. *a.* Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A.

b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B.

c. En déduire que $b = -a$.

2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation : $2(x-1)e^{x} + 1 = 0$.

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = 2(x-1)e^{x} + 1$

1. *a.* Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

2. *a.* Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.

À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

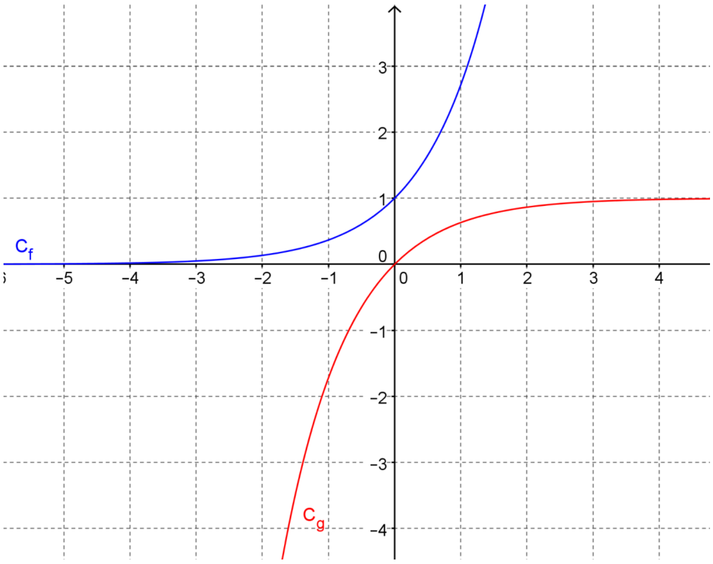
On note E le point de la courbe C_f d'abscisse α et F le point de la courbe C_g d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe C_f au point E.

2. Démontrer que (EF) est tangente à C_g au point F.

Annexe
à rendre avec la copie

Exercice 2



EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2\,\mathrm{i},\ b = -\sqrt{3} + \mathrm{i},\ c = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \text{ et } e = -1 + (2 + \sqrt{3})\,\mathrm{i}.$$

1. **Affirmation 1 :** les points A, B et C sont alignés.

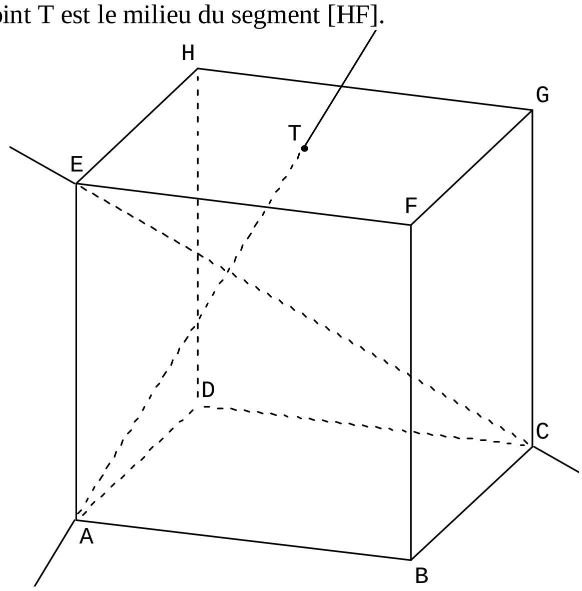
2. **Affirmation 2 :** les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

Affirmation 3 : la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, coupe le plan (IJK) au point $E\left(-\frac{1}{2} ; 1 ; \frac{1}{2}\right)$.

4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n > 1$.

2. *a*. Établir que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul *n*
Initialisation	Affecter à *u* la valeur 2
Traitement et sortie	POUR *i* allant de 1 à *n* Affecter à *u* la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher *u*
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996	1,000001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de *n*.

4. *a.* Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $v_n \neq 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie. Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle O E ′ F ′ G ′, appelé image de OEFG.

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

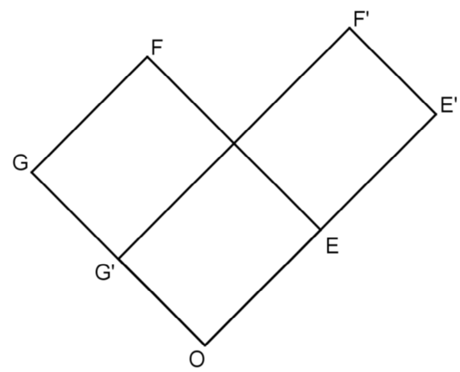


Figure 1

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives (2 ; 2), (– 1 ; 5) et (– 3 ; 3).

La transformation du logiciel associe à tout point M(x ; y) du plan le point M′ (x' ; y'), image du point M tel que : $\begin{cases} x' = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}y \\ y' = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}y \end{cases}$

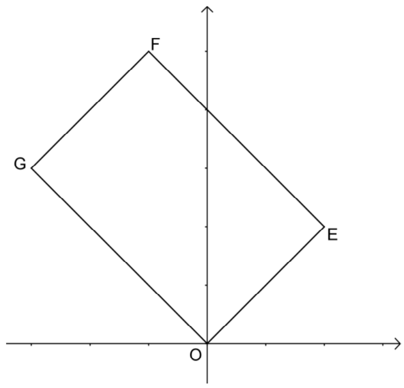


Figure 2

1\. ***a.*** Calculer les coordonnées des points E′, F′, et G′, images des points E, F et G par cette transformation.

b. Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.

Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1\. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives. Une erreur a été commise. Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur − 1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2\. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2047,9971	65535,9999
y	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2048,0029	65536,0001

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points E_n (x_n ; y_n) du plan par $E_0 = E$ et la relation de récurrence : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, où ($x_{n+1}$; y_{n+1}) désignent les coordonnées du point E_{n+1}. Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1\. On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

2\. ***a.*** Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.

On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées (x_n ; y_n) du point E_n vérifient : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

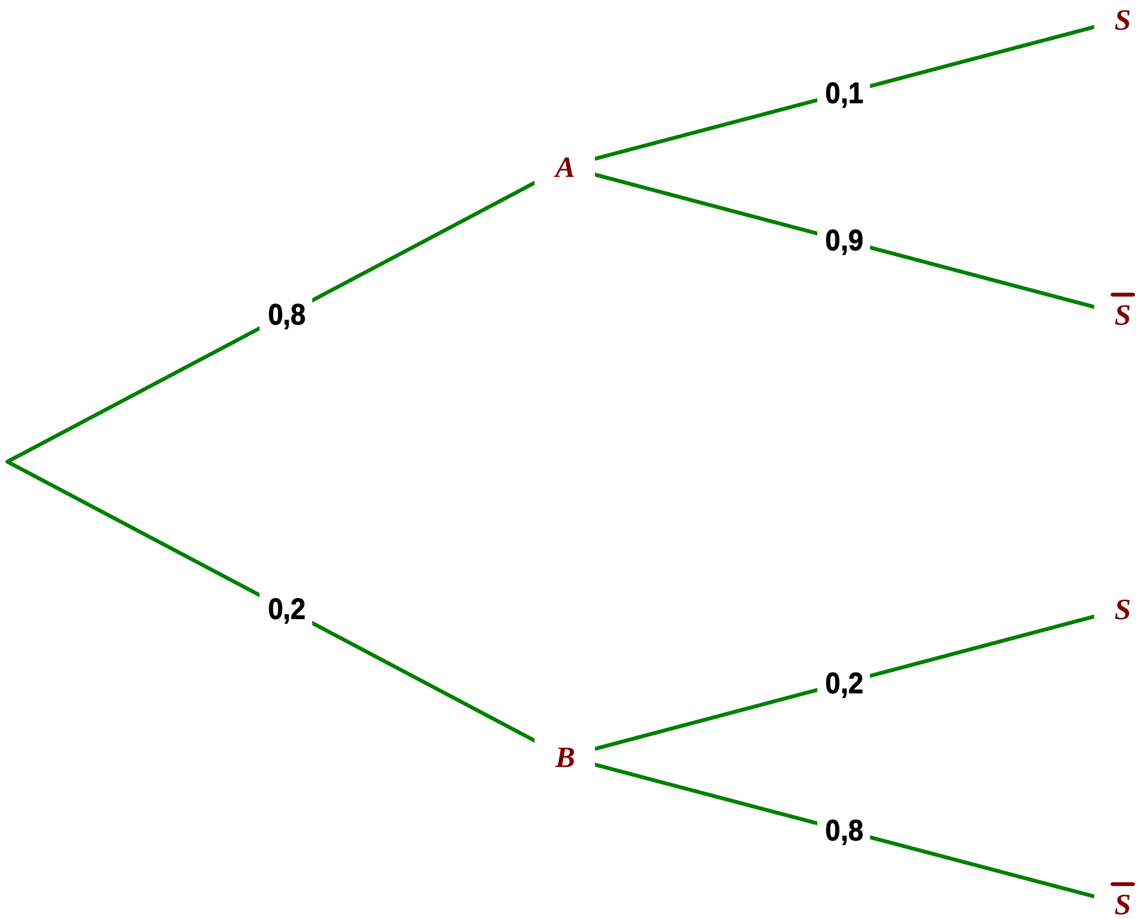
b. Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. *a.* $P(B \cap \overline{S}) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$

b. $P(\overline{S}) = P(A \cap \overline{S}) + P(B \cap \overline{S}) = 0{,}8 \times 0{,}9 + 0{,}16 = 0{,}88$

3. $P_S(B) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}2 \times 0{,}2}{1 - 0{,}88} = \dfrac{1}{3}$

Partie B

1. On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :
réussite : la boîte est sans trace de pesticides ($p = 0{,}88$)
échec : la boîte n'est pas sans trace de pesticides ($q = 0{,}12$)
donc X suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,88).

.

2. $P(X = 10) = 0{,}88^{10}$ soit environ 0,28

3. $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$ soit environ 0,89 (on pouvait aussi dire que $P(X \leq 8) = 1 - P(X \leq 7)$)

Partie C

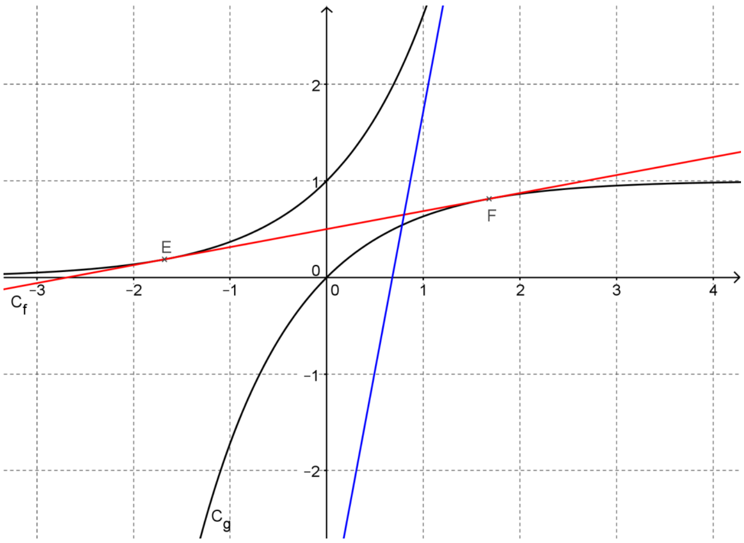
1. $n = 50$, $n\,p = 50 \times 0{,}88 = 44$ et $n\,(1 - p) = 50 \times 0{,}12 = 6$ donc les conditions d'applications sont vérifiées
L'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 % est :
$\left[0{,}88 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}88 \times 0{,}12}{50}} \; ; 0{,}88 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}88 \times 0{,}12}{50}} \right]$ soit environ [0,78 ; 0,98] (prendre une valeur approchée par défaut de la borne inférieure de l'intervalle et une valeur approchée par excès de la borne supérieure de l'intervalle).

2. Pour l'échantillon, la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides est $f = 1 - \dfrac{12}{50} = 0{,}76$

$f \notin I_{50}$ et $f < 0{,}78$. L'échantillon n'est pas représentatif de ce qu'annonce le grossiste. L'inspecteur de la brigade de répression peut décider que la publicité est mensongère.

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats

Partie A



Partie B

1. *a.* $f'(x) = e^x$ donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A est e^a

b. $g'(x) = e^{-x}$ donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B est e^{-b}

c. Les deux tangentes sont confondues donc leurs coefficients directeurs sont égaux donc $e^a = e^{-b}$ donc $a = -b$ soit $b = -a$.

2. Une équation de la tangente en A à C_f est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ soit $y = e^a(x-a) + e^a$.
Cette droite passe par B de coordonnées $(b\,;\,g(b))$ avec $b = -a$ donc B a pour coordonnées $(-a\,;\,1-e^a)$
donc $1 - e^a = e^a(-a-a) + e^a$ soit $1 - e^a = -2a\,e^a + e^a$. soit $1 + 2a\,e^a - 2e^a = 0$
Le réel a est solution de l'équation : $2(x-1)e^x + 1 = 0$.

Partie C

1. *a.* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$

$\varphi(x) = 2x\,e^x - 2e^x + 1$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1$

b. $\begin{cases} u(x) = 2(x-1) & u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x & v'(x) = e^x \end{cases}$ donc $\varphi'(x) = 2e^x + 2(x-1)e^x = 2x\,e^x$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que x.

c. $\varphi(0) = -2e^0 + 1 = -1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	↘	-1	↗	$+\infty$

2. *a.* Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$, la fonction φ est continue et strictement décroissante, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1$ et $\varphi(0) = -1$, $0 \in [-1\,;\,1[$ donc, l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique solution α sur $]-\infty\,;\,0]$
Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction φ est continue et strictement croissante, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\varphi(0) = -1$, $0 \in [-1\,;\,+\infty[$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique β solution sur $]0\,;\,+\infty[$.
L'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b. $\varphi(-1{,}68) > 0$ et $\varphi(-1{,}67) > 0$ donc $-1{,}68 < \alpha < -1{,}67$ de même $\varphi(0{,}76) < 0$ et $\varphi(0{,}77) > 0$ donc $0{,}76 < \beta < 0{,}77$

Partie D

1. La tangente en E à la courbe C_f a pour équation $y = e^\alpha(x-\alpha) + e^\alpha$, cette droite passe par E par définition de la tangente.
F est le point de coordonnées $(-\alpha\,;\,1-e^\alpha)$
Si $x = -\alpha$ et $y = 1 - e^\alpha$, alors $y_F - [e^\alpha(x_F - \alpha) + e^\alpha] = (1 - e^\alpha) - [e^\alpha(-\alpha-\alpha) + e^\alpha] = 2\alpha\,e^\alpha - 2e^\alpha + 1 = 2(\alpha-1)e^\alpha + 1$
or α est solution de $\varphi(x) = 0$ donc $2(\alpha-1)e^x + 1 = 0$ donc $y_F - [e^\alpha(x_F-\alpha) + e^\alpha] = 0$ soit $y_F = e^\alpha(x_F - \alpha) + e^\alpha$
F appartient à la tangente en E à la courbe C_f.
La droite (EF) est confondue avec la tangente à la courbe C_f au point E.

2. La tangente en F à la courbe C_g a pour équation $y = e^\alpha(x+\alpha) + 1 - e^\alpha$, cette droite passe par F par définition de la tangente.
E est le point de coordonnées $(\alpha\,;\,e^\alpha)$
Si $x = \alpha$ et $y = e^\alpha$, alors $y_E - [e^\alpha(x_E + \alpha) + 1 - e^\alpha] = e^\alpha - [e^\alpha(\alpha+\alpha) + 1 - e^\alpha] = -2\alpha\,e^\alpha + 2e^\alpha - 1 = -[2(\alpha-1)e^\alpha + 1]$

or α est solution de $\varphi(x) = 0$ donc $2(\alpha - 1)\,e^{x} + 1 = 0$ donc $y_E - [\,e^{\alpha}(x_E + \alpha) + 1 - e^{\alpha}\,] = 0$ soit $y_E = [\,e^{\alpha}(x_E + \alpha) + 1 - e^{\alpha}$
E appartient à la tangente en F à la courbe C_g.
La droite (EF) est confondue avec la tangente à la courbe C_g au point F. La droite (EF) est tangente commune à C_f et à C_g..

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

1. Affirmation 1 : VRAIE

Pour montrer que les points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ donc en égalant les affixes, un réel k tel que : $b - a = k\,(c - a)$

$b - a = -2 - \sqrt{3} - i$ et $c - a = -1 + i\,(\sqrt{3} - 2) = -1 - i\,(2 - \sqrt{3})$

$c - a$ a pour partie réelle -1 et $b - a$ a pour partie réelle $-2 - \sqrt{3}$, or $k\,(c - a)$ a pour réelle $-k$ donc si k existe $k = 2 + \sqrt{3}$

$(2 + \sqrt{3})(c - a) = -(2 + \sqrt{3}) + i\,(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$ or $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^{\,2} = 1$

$(2 + \sqrt{3})(c - a) = -2 - \sqrt{3} - i$ donc $(2 + \sqrt{3})(c - a) = (b - a)$ donc $\overrightarrow{AB} = (2 + \sqrt{3})\,\overrightarrow{AC}$, les points A, B et C sont alignés.

On pouvait aussi calculer $\dfrac{b - a}{c - a}$ et montrer que le résultat était un réel k, on arrivait alors à $b - a = k\,(c - a)$ d'où le résultat.

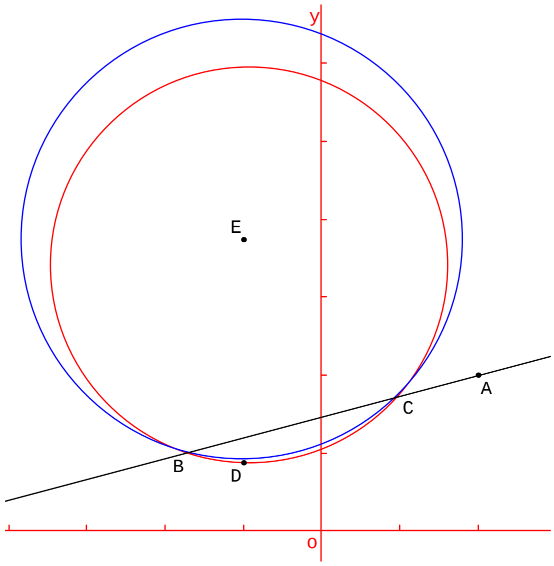
2. Affirmation 2 : FAUSSE

$EB = |-\sqrt{3} + i + 1 - (2 + \sqrt{3})\,i| = |-1 - \sqrt{3} - i\,(1 + \sqrt{3})|$

$EB = \sqrt{(-1 + \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$

$EC = |1 + i\sqrt{3} + 1 - (2 + \sqrt{3})\,i| = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$d - e = -\dfrac{\sqrt{3} + 2}{2}\,i$ donc $ED = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{2}$, $ED \neq EB$



3. Affirmation 3 : VRAIE

Le plan (IJK) a pour équation $x + y + z = 1$ donc a pour vecteur normal $\vec{n}\,(1\,;1\,;1)$

Soit $E\left(-\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$, $x_E + y_E + z_E = -\dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{1}{2} = 1$ donc $E \in P$.

Cherchons le point d'intersection de D et de P. Les coordonnées de ce point sont de la forme $(2 - t\,;6 - 2t\,;-2 + t)$

$x + y + z = 2 - t + 6 - 2t - 2 + t = 6 - 2t$ donc $6 - 2t = 1$ donc $t = \dfrac{5}{2}$

Le point d'intersection de D et de P a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ donc est le point E.

4. Affirmation 4 : VRAIE

$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ET})\cdot(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{ET}\cdot\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{ET}\cdot\overrightarrow{GC}$

Soit $a = AB$ alors $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC} = 0 + a^2 + 0 - a^2$ donc $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC} = 0$, les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

Initialisation : $u_0 = 2$ donc $u_0 > 1$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$

Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel n, si $u_n > 1$ alors $u_{n+1} > 1$.

$u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - 1 = \dfrac{2u_n - 2}{3+u_n} = 2\dfrac{u_n - 1}{3+u_n}$ or $u_n > 1$ donc $u_{n+1} - 1 > 0$ soit $u_{n+1} > 1$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

2. *a.* $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{1-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$

b. Pour tout entier naturel n, $u_n > 1$ donc $1 - u_n < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

La suite (u_n) est décroissante minorée par 1 donc converge.

Partie B

1.

i	1	2	3
u	0,8	1,077	0,976

2. Apparemment $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}$ or $u_{n+1} - 1 = 0,5\dfrac{1-u_n}{0,5+u_n}$ et $u_{n+1} + 1 = 1,5\dfrac{1+u_n}{0,5+u_n}$ donc $v_{n+1} = \dfrac{0,5}{1,5} \times \dfrac{\dfrac{1-u_n}{0,5+u_n}}{\dfrac{1+u_n}{0,5+u_n}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$

$v_{n+1} = -\dfrac{1}{3} v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. $v_0 = \dfrac{1}{3}$ donc $v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$.

4. *a.* Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ donc $v_n \neq 1$.

b. $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ donc $v_n(u_n + 1) = (u_n - 1) \Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -1 - v_n \Leftrightarrow u_n - u_n v_n = 1 + v_n \Leftrightarrow u_n(1 - v_n) = 1 + v_n$

Pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$ donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

c. $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

1\. ***a.*** E' a pour coordonnées $\begin{cases} x' = \dfrac{5}{4}\times 2 + \dfrac{3}{4}\times 2 \\ y' = \dfrac{3}{4}\times 2 + \dfrac{5}{4}\times 2 \end{cases}$ soit (4 ; 4)

de même F' a pour coordonnées (2,5 ; 5,5) et G' a pour coordonnées (– 1,5 ; 1,5)

b. $OE^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ donc $OE = 2\sqrt{2}$, $OE'^2 = 4^2 + 4^2$ donc $OE' = 4\sqrt{2} = 2\,OE$

$OG^2 = (-3)^2 + 3^2$ donc $OG = 3\sqrt{2}$ $OG'^2 = (-1,5)^2 + 1,5^2$ donc $OG' = 1,5\sqrt{2}$, $OG' = \dfrac{1}{2}OG$.

La transformation ne conserve pas les longueurs, ni ne les multiplie par un même nombre.

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{4}\times 2 + \frac{3}{4}\times 2 \\ y' = \frac{3}{4}\times 2 + \frac{5}{4}\times 2 \end{cases} \text{ donc } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Partie B

1. L'algorithme est destiné à afficher les coordonnées de ces images successives, or l'algorithme proposé ne permet d'obtenir que le dernier terme u_N, il faut donc intégrer dans la boucle « Pour », l'affichage de x et de y.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur − 1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b Afficher x, Afficher y FIN POUR
Sortie	

2. Apparemment les coordonnées de F tendent vers + ∞ et le point se rapproche de la droite d'équation $y = x$.

Partie C

1. Montrons que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Initialisation :si $n = 1$, $2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \alpha_0$ et $2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \beta_0$.

La propriété est vérifiée pour $n = 1$

Hérédité : montrons que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$, alors : $\alpha_{n+1} = 2^n + \frac{1}{2^{n+2}}$ et $\beta_{n+1} = 2^n - \frac{1}{2^{n+2}}$

$$\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{A}\times\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n & \frac{5}{4}\beta_n + \frac{3}{4}\alpha_n \\ \frac{5}{4}\beta_n + \frac{3}{4}\alpha_n & \frac{5}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n \end{pmatrix} \text{ donc } \alpha_{n+1} = \frac{5}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{3}{4}\alpha_n + \frac{5}{4}\beta_n$$

$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$, donc $\alpha_{n+1} = \frac{5}{4}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{3}{4}\left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$\alpha_{n+1} = \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right)2^{n-1} + \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)\frac{1}{2^{n+1}}$ donc $\alpha_{n+1} = 2\times 2^{n-1} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n+1}} = 2^n + \frac{1}{2^{n+2}}$

$\beta_{n+1} = \frac{3}{4}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{5}{4}\left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ donc $\beta_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right)2^{n-1} + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right)\frac{1}{2^{n+1}}$

$\beta_{n+1} = 2\times 2^{n-1} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n+1}} = 2^n - \frac{1}{2^{n+2}}$

La propriété est héréditaire donc , pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

2. ***a.*** Pour tout entier naturel n, $x_n = 2\,\alpha_n + 2\,\beta_n$ et $y_n = 2\,\alpha_n + 2\,\beta_n$ donc $x_n = y_n$ donc pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.

b. $\mathrm{OE}_n{}^2 = x_n{}^2 + y_n{}^2 = 4\,(\alpha_n + \beta_n)^2 + 4\,(\alpha_n + \beta_n)^2 = 8\,(\alpha_n + \beta_n)^2$

$\alpha_n + \beta_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} + 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$

$\alpha_n + \beta_n = 2\times 2^{n-1}$ donc $\alpha_n + \beta_n = 2^n$

$\alpha_n + \beta_n > 0$ donc $\mathrm{OE}_n = 2\,(\alpha_n + \beta_n)\sqrt{2}$

$\mathrm{OE}_n = 2^{n+1}\sqrt{2}$

$2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{OE}_n = +\infty$.