Amérique du Nord juin 2017

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n > 0$, $u_n > 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

On a en particulier $s_1 = u_0$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b. En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.

c. Montrer que pour tout $n > 0$, $u_n > 1$.

3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme un pour une valeur de n donnée.

a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

```
Entrée :     Saisir n
             Saisir u
Traitement : s prend la valeur u
             Pour i allant de 1 à n :
               | u prend la valeur ...
               | s prend la valeur ...
             Fin Pour
Sortie :     Afficher U
```

b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4. *a.* Justifier que pour tout entier $n \geq 0$, $s_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

Antilles Guyane juin 2017

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1 ; e]$ notée α_n.

2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n > 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

a. Sur le graphique sont tracées les droites D3, D4 et D5 d'équations respectives $y = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{5}$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

b. Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$. Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).

c. En déduire que la suite (α_n) converge. Il n'est pas demandé de calculer sa limite.

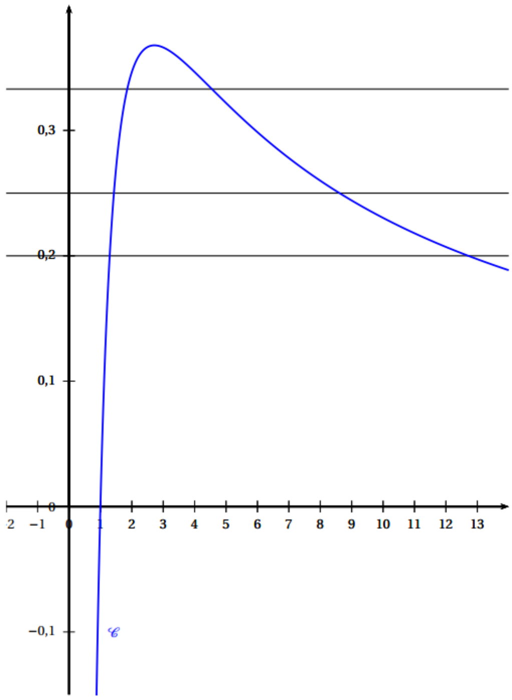
3. On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que $1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n$.

a. On admet que la suite (β_n) est croissante.

Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $\beta_n \geq n \dfrac{\beta_3}{3}$.

b. En déduire la limite de la suite (β_n).

ANNEXE
Cette annexe n'est pas à rendre.



Asie juin 2017

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)u_n.$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n + 1)\, u_n$.

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent millième.
Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B_3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?

2. *a.* Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.

b. Démontrer cette conjecture.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,25000	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

Centres étrangers juin 2017

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{n u_n + 1}{2(n+1)}.$$

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de suite, un élève propose l'algorithme ci-contre. a oublié de compléter deux lignes.

Variables	*n* est un entier naturel *u* est un réel
Initialisation :	Affecter à *n* la valeur 1 Affecter à *u* la valeur 1,5
Traitement :	TANT QUE $n < 9$ Affecter à *u* la valeur ….. Affecter à *n* la valeur ….. Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher la variable *u*

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.

2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	….	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	…..	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$; $v_n = n\,u_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n = \dfrac{1+(0,5)^n}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Justifier que, pour tout entier $n > 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1+(1+0,5\,n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0{,}001$.

Métropole juin 2017

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :

S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;

M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;

I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \text{ ; } P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

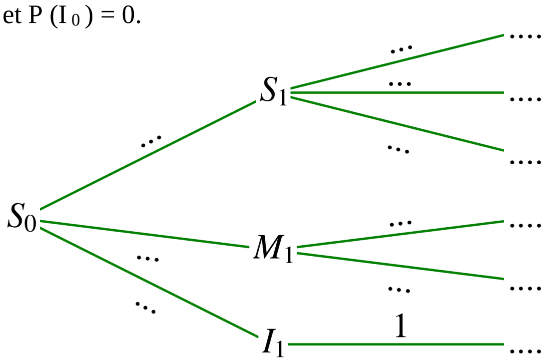
Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-contre :

2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?



PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0{,}65\,v_n + 0{,}05\,u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Pour répondre aux questions ***a.*** et ***b.*** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.

Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

3. *a.* Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}85\,u_n$.

En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{4}\left(0{,}85^n - 0{,}65^n\right)$.

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Nouvelle-Calédonie mars 2017

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \geq 0 \end{cases}$.

On obtient à l'aide d'un tableur les premiers termes de cette suite :

	A	B	C
1		u_n	u_n
2	n	(en valeurs exactes)	(en valeurs approchées)
3	0	0	0
4	1	½	0,5
5	2	2/3	0,666 666 667
6	3	¾	0,75
7	4	4/5	0,8
8	5	5/6	0,833 333 333
9	6	6/7	0,857 142 857
10	7	7/8	0,875
11	8	8/9	0,888 888 889
12	9	9/10	0,9
13	10	10/11	0,909 090 909

Prouver que la suite (u_n) converge.

Pondichéry avril 2017

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_{n+1} = 2^n$;

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3080	1024
13	11	6153	2048
14	12	12298	4096
15	13	24587	8192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.