Soit f la fonction défini sur] 0 ; + ∞ [par $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

1. *a.* Démontrer que f est strictement positive sur] 0 ; + ∞ [

b. Démontrer que f est strictement décroissante sur cet intervalle

2. Pour tout entier naturel n non nul on note u_n l'aire du domaine rectangulaire délimite par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = n - 1$ et $x = n$ et la droite d'équation $y = f(n)$

a. Faire un schéma et faire apparaitre u_1, u_2 et u_3.

b. Préciser le sens de variation et la limite de la suite u_n.

3. Pour tout entier naturel n non nul on pose: $S_n = u_1 + u_2 + ... u_n$.

a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

b. Démontrer que, pour tout n supérieur à 0, $S_n = \ln(n + 1)$

c. En déduire la limite de la suite S_n.

Correction

1. *a.* Pour tout x de] 0 ; + ∞ [, $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$.

$x > 0$ donc $1 + \frac{1}{x} > 1$ donc $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \ln 1$ soit $f(x) > 0$. f est strictement positive sur] 0 ; + ∞ [.

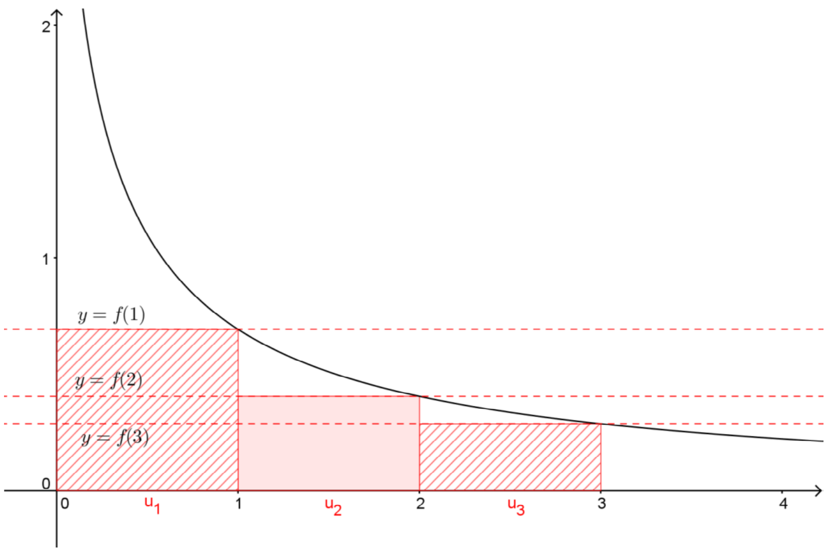
b. f est de la forme $\ln u$ où u est la fonction $x \to \frac{x+1}{x}$

La dérivée de $\ln u$ est $\frac{u'}{u}$ avec $u'(x) = \frac{-1}{x^2}$ donc $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{x(x+1)}$

Pour tout x de] 0 ; + ∞ [, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur cet intervalle.

On pouvait aussi dire que la fonction $u : x \to 1 + \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur] 0 ; + ∞ [, que la fonction ln est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [donc leur composée f est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

2. *a.*



b. u_n est l'aire d'un rectangle de longueur $n - (n - 1)$ soit 1 et de largeur $f(n)$

$u_n = f(n) \times 1$ donc $u_n = f(n)$

La fonction f est strictement décroissante sur] 0 ; + ∞ [donc la suite (u_n) est strictement décroissante

$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

$\lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln 1 = 0$

3. *a.* $S_{n+1} - S_n = (u_1 + u_2 + ... u_n + u_{n+1}) - (u_1 + u_2 + ... u_n)$ donc $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} = f(n + 1)$

La fonction f est strictement positive sur] 0 ; + ∞ [donc $S_{n+1} - S_n > 0$.

La suite (S_n) est strictement croissante.

b. Pour tout $n > 0$, $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$

En écrivant successivement cette propriété pour les différents termes de la suite :

$$\begin{array}{lcccc}
u_1 & = & \cancel{\ln 2} & - & \ln 1 \\
u_2 & = & \cancel{\ln 3} & - & \cancel{\ln 2} \\
 & & & & \\
u_{n-1} & = & \cancel{\ln n} & - & \cancel{\ln(n-1)} \\
u_n & = & \ln(n+1) & - & \cancel{\ln n}
\end{array}$$

Par addition terme à terme : $u_1 + u_2 + ... + u_n = \ln(n+1) - \ln 1$

$\ln 1 = 0$ donc pour tout $n > 0$, $S_n = \ln(n+1)$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$