

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$ et $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

u_n

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

a. Calculer v_0

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

d. Exprimer (v_n) en fonction de n

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

a. Calculer w_0

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .

c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$

d. Exprimer w_n en fonction de n

4. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

5. Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

CORRECTION

1. En remplaçant n par 0 dans la relation $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ on obtient $u_2 = u_{0+1} - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$u_1 - u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{1}{4}$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique

$u_1 = -\frac{1}{2}u_0$ et $u_2 \neq -\frac{1}{2}u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. a. En remplaçant n par 0 dans la relation $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

$$v_0 = u_{0+1} - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$b. \quad v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right) = \frac{1}{2}v_n$$

c. $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1

$$d. \quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

$$3. a. \quad w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$$

$$b. \quad u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n \text{ donc } w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{v_n} \text{ donc } w_{n+1} = 2 \left(\frac{v_n}{v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{v_n} \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{u_n}{v_n} \right)$$

$$w_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$$

c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$ donc $w_{n+1} = 2 + w_n$

d. (w_n) est une suite arithmétique de premier terme -1 et de raison 2 donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = w_0 + n r = 2n - 1$

4. Pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ donc $u_n = w_n \times v_n$ donc $u_n = (2n - 1) \times \frac{1}{2^n}$ soit $u_n = \frac{2n - 1}{2^n}$

5. Pour $n = 0$: $S_0 = u_0 = -1$ or $2 - \frac{2n+3}{2^n} = 2 - 3 = -1$ donc pour $n = 0$ la propriété est vraie.

Montrons que la propriété est héréditaire donc que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ alors $S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$.

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$$

$$S_{n+1} = 2 - \frac{2(2n+3)}{2^{n+1}} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$$

$$S_{n+1} = 2 + \frac{2(n+1)-1-2(2n+3)}{2^{n+1}}$$

$$S_{n+1} = 2 + \frac{2n+2-1-4n-6}{2^{n+1}}$$

$$S_{n+1} = 2 + \frac{-2n-5}{2^{n+1}} \text{ donc } S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}.$$

La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$