Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur R par : $f_k(x) = \dfrac{1}{1+e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

La représentation graphique C_1 de la fonction f_1 dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$, et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

3. On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur R. Calculer, pour tout réel x, $f'_1(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur R.

4. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe C_{-1} représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de C_1 d'abscisse x et M le point de C_{-1} d'abscisse x.
On note K le milieu du segment [MP].

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe C_{-1} sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.

4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes C_1, C_{-1} l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

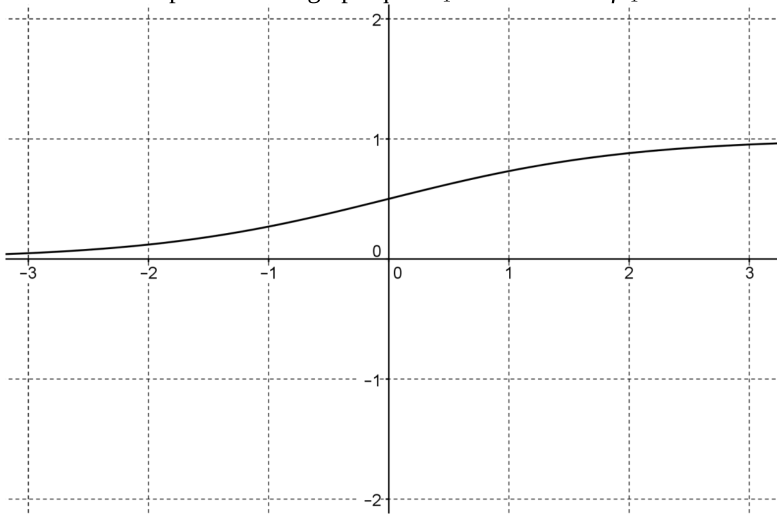
1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.

3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq 0{,}99$.

ANNEXE

Représentation graphique C_1 de la fonction f_1



CORRECTION

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C_1 en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à C_1 en $+\infty$

2. Pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^{x}}{e^{x}(1+e^{-x})}$ or $e^{x} \times e^{-x} = 1$ donc pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$.

3. Pour tout réel x, $f'_1(x) = \dfrac{e^{x}(1+e^{x}) - e^{x} \times e^{x}}{(1+e^{x})^2}$ donc $f'_1(x) = \dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}$.

Pour tout x réel, $e^{x} > 0$ donc $f'_1(x) > 0$ donc la fonction f_1 est strictement croissante sur R.

4. $f_1(x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + e^{x}$ donc une primitive de f_1 est $\ln[1 + e^{x}]$

$I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx = \left[\ln(1+e^{x})\right]_0^1 = \ln(1+e) - 2\ln(1+e^0)$ donc $I = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$.

I est une mesure du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe C_1, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

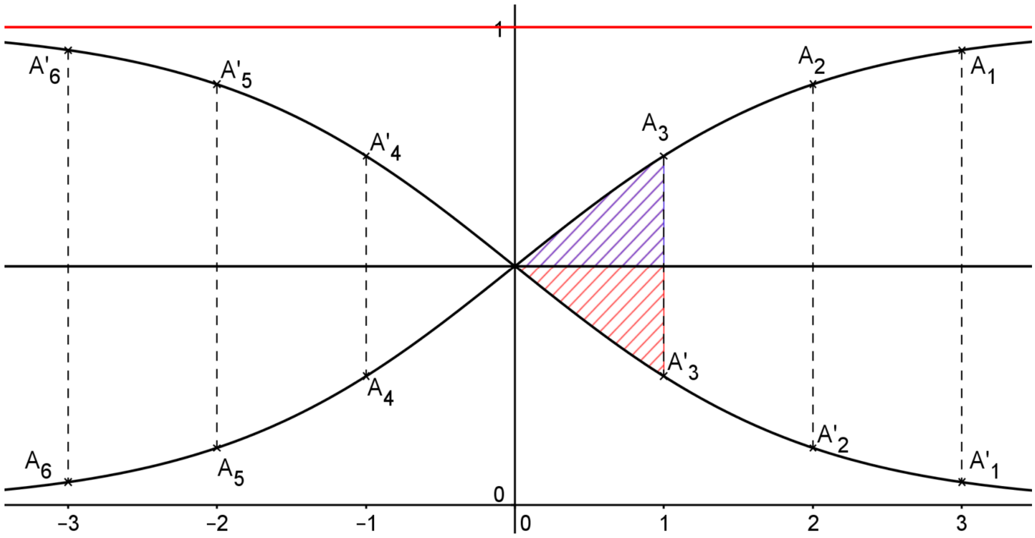
1. $f_{-1}(x) = \dfrac{1}{1+e^{x}}$ et $f_1(x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ donc pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

2. P est le point de C_1 d'abscisse x et d'ordonnée $f_1(x)$ et M le point de C_{-1} d'abscisse x et d'ordonnée $f_1(-x)$.

K est le milieu du segment [MP] donc a pour ordonnée $\dfrac{1}{2}[f_1(x) + f_{-1}(x)]$ donc $\dfrac{1}{2}$.

Le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3. Les courbes C_1 et C_{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.



4. l'aire du domaine hachuré en bleu est égale à I – 0,5 donc A = 2 I – 1 soit $2\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right) - 1$ unités d'aires.

Partie C

1. **VRAI,** Pour tout x réel, $1 + e^{-kx} > 1$ donc $0 < f_k(x) < 1$

2. **FAUX** Si $k = 0$, f_k est une fonction constante égale à $\dfrac{1}{2}$.

$f'_k(x) = \dfrac{-(-k)e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$ donc $f'_k(x)$ *a* le même signe que k, si $k < 0$, $f_k(x)$ est décroissante.

3. **VRAI** Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{k}{2}}}$ donc si $k \geq 10$, $e^{-\frac{k}{2}} < e^{-5}$ donc $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) > \dfrac{1}{1+e^{-5}} > 0{,}99$