Pondichéry avril 2010

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a. Démontrer que: $P(X = -1) = \dfrac{20\,n}{(n+10)(n+9)}$.

b. Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable a1éatoire X vaut : $E(X) = \dfrac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$

d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants.

Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que $n = 1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ P(Z \le k) = \int_0^k 0{,}01\, e^{-0{,}01x}\, dx .$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \le 50)$.

b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : « le joueur *a* tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'évènement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

CORRECTION

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne donc on est en situation d'équiprobabilité.

Le nombre initial de boules est $n + 10$, le joueur choisit une boule donc a $n + 10$ choix possibles et ne remet pas cette boule dans l'urne donc le nombre de boules possibles lors du second tirage est $n + 9$.

a. Lors d'un tirage de deux boules, soit le jouer tire deux boules blanches, et gagne 4 €

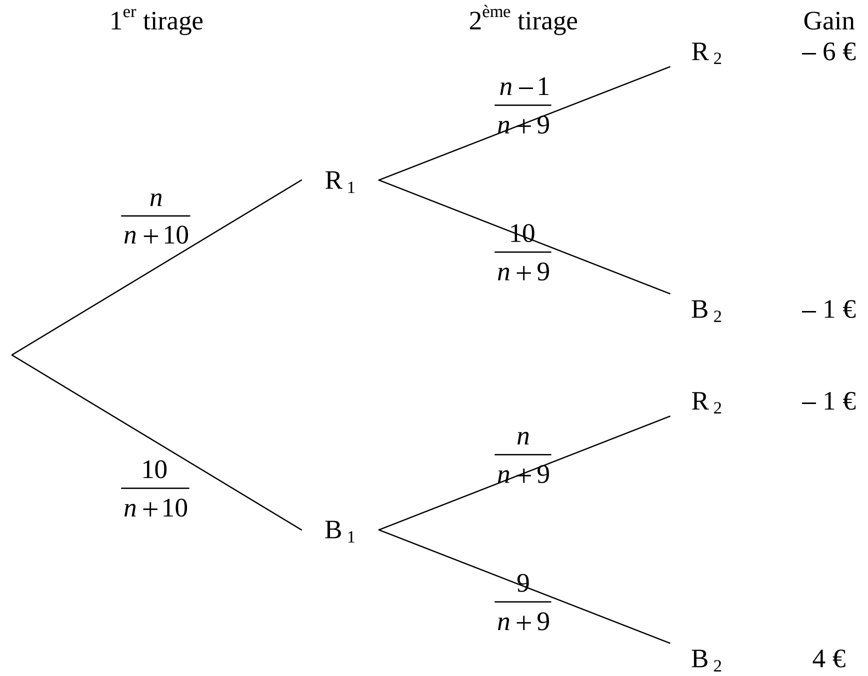
soit le jouer tire une boule blanche et une boule rouge, et gagne 2 – 3 = – 1 €

soit le jouer tire deux boules rouges, et gagne – 6 €.

Si le joueur tire une boule rouge au premier tirage, l'urne contient 10 boules blanches et $n - 1$ boules rouges

Si le joueur tire une boule blanche au premier tirage, l'urne contient 9 boules blanches et n boules rouges.

d'où l'arbre de choix :



$p(X = -1) = \dfrac{n}{n+10} \times \dfrac{10}{n+9} + \dfrac{10}{n+10} \times \dfrac{9}{n+9}$ donc $P(X = -1) = \dfrac{20\,n}{(n+10)(n+9)}$.

b. $p(\text{X} = -6) = \dfrac{n}{n+10} \times \dfrac{n-1}{n+9}$ donc $\text{P}(\text{X} = -6) = \dfrac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$

$p(\text{X} = 4) = \dfrac{10}{n+10} \times \dfrac{9}{n+9}$ donc $\text{P}(\text{X} = -6) = \dfrac{90}{(n+10)(n+9)}$.

c. $\text{E(X)} = 4\,p(\text{X} = 4) + (-1)\,p(\text{X} = -1) + (-6)\,p(\text{X} = -6)$ donc $\text{E(X)} = \dfrac{360}{(n+10)(n+9)} - \dfrac{20\,n}{(n+10)(n+9)} - \dfrac{6\,n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$

$\text{E(X)} = \dfrac{-6\,n^2 + 6\,n - 20\,n + 360}{(n+10)(n+9)} \Leftrightarrow \text{E(X)} = \dfrac{-6\,n^2 - 14\,n + 360}{(n+10)(n+9)}$

d. $\text{E(X)} > 0 \Leftrightarrow -6\,n^2 - 14\,n + 360 > 0$

$-6\,x^2 - 14\,x + 360 = 0$ or $\Delta = 14^2 + 4 \times 6 \times 360 = 94^2$ donc les solutions sont $x_1 = -9$, $x_2 = \dfrac{20}{3}$

n étant un entier supérieur ou égal à 2, l'espérance mathématique est strictement positive si $n \geq 7$

2. Les événements « obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages » et « obtenir 20 boules blanches au cours de ces 20 tirages » sont contraires donc : $p = 1 - \left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20}$

$p > 0{,}999 \Leftrightarrow \left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20} < 1 - 0{,}999 \Leftrightarrow \left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20} < 0{,}001 \Leftrightarrow \dfrac{10}{n+10} < \sqrt[20]{0{,}001} \Leftrightarrow n + 10 > \dfrac{10}{\sqrt[20]{0{,}001}} \Leftrightarrow n > \dfrac{10}{\sqrt[20]{0{,}001}} - 10$

$\Leftrightarrow n \geq 5$

3. $\text{P}(\text{Z} \leq k) = \int_0^k 0{,}01^{\,-0{,}01\,x}\,\text{d}x = \left[-\text{e}^{-0{,}01\,x}\right]_0^k$ donc $\text{P}(\text{Z} \leq k) = 1 - \text{e}^{-0{,}001\,k}$

a. $\text{P}(\text{Z} \leq 50) = 1 - \text{e}^{-0{,}001 \times 50} = 1 - \text{e}^{-0{,}05}$ donc $\text{P}(\text{Z} \leq 50) \approx 0{,}049$

b. $\text{P}(\text{Z} \leq 60 / \text{Z} > 50) = \dfrac{\text{P}(50 < \text{Z} \leq 60)}{P(\text{Z} > 50)}$

$\text{P}(50 < \text{Z} \leq 60) = \int_{50}^{60} 0{,}01^{\,-0{,}01\,x}\,\text{d}x = \left[-\text{e}^{-0{,}01\,x}\right]_{50}^{60}$

$\text{P}(50 < \text{Z} \leq 60) = \text{e}^{-0{,}05} - \text{e}^{-0{,}06}$

$\text{P}(\text{Z} \leq 50) = 1 - \text{e}^{-0{,}05}$ donc $\text{P}(\text{Z} > 50) = 1 - \text{P}(\text{Z} \leq 50) = \text{e}^{-0{,}05}$

donc $\text{P}(\text{Z} \leq 60 / \text{Z} > 50) = \dfrac{\text{e}^{-0{,}05} - \text{e}^{-0{,}06}}{\text{e}^{-0{,}05}} = 1 - \text{e}^{-0{,}01}$

On aurait pu dire plus simplement que Z suit une loi de durée de vie sans vieillissement donc l'événement « le joueur *a* tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche sachant qu'il a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche » *a* la même probabilité que « le joueur a tiré 10 boules pour tirer une boule blanche »

donc $\text{P}(\text{Z} \leq 60 / \text{Z} > 50) = \text{P}(\text{Z} \leq 10) = 1 - \text{e}^{-0{,}01}$