Soit $a$ un nombre complexe non nul et différent de 1 de forme trigonométrique $\rho\, e^{i\theta}$.
On définit la suite de points $(A_n)$ de la façon suivante : $A_0$ est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel $n$, on note $A_n$ le point d'affixe $z_n$ avec $z_n = 1 + a + \dots a^n$.

1. Calculer $(\overrightarrow{A_{n-1}A_n} ; \overrightarrow{A_nA_{n+1}})$ et $\dfrac{A_nA_{n+1}}{A_{n-1}A_n}$ pour tout $n \geq 1$.

2. Soit $\Omega$ le point d'affixe $\omega = \dfrac{1}{1-a}$.

*a.* Montrer que $z_{n+1} - \omega = a\,(z_n - \omega)$ pour $n \geq 0$. Interpréter géométriquement ce résultat.
*b.* En déduire la nature de la suite $(\Omega A_n)$
*c.* On suppose que $0 \leq \rho \leq 1$ Que se passe t-il quand $n$ tend vers $+\infty$ ?
3. Placer sur la figure le point $A_0$ avec pour unité graphique 10 cm

On prendra $a = 0{,}9\ e^{i\frac{2\pi}{5}}$ puis construire les point $A_1$ ... $A_8$. Placer $\Omega$ sur la figure.

**CORRECTION**

1. pour tout $n \geq 1$, $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ a pour affixe $z_n - z_{n-1} = (1 + a + \dots + a^{n-1} + a^n) - (1 + a + \dots + a^{n-1}) = a^n$

$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ a pour affixe $z_{n+1} - z_n = (1 + a + \dots + a^n + a^{n+1}) - (1 + a + \dots + a^n) = a^{n+1}$

donc $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}} = \dfrac{a^{n+1}}{a^n} = a$

$(\overrightarrow{A_{n-1}A_n} ; \overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \arg\left(\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}}\right)$ donc $(\overrightarrow{A_{n-1}A_n} ; \overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \arg(a)$ soit $(\overrightarrow{A_{n-1}A_n} ; \overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \theta + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$\dfrac{A_nA_{n+1}}{A_{n-1}A_n} = \left|\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_n - z_{n-1}}\right| = |a| = \rho$.

2. *a.* $a \neq 1$, $z_n = 1 + a + \dots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ et $z_{n+1} = 1 + a + \dots + a^{n+1} = \dfrac{1-a^{n+2}}{1-a}$

$z_n - \omega = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} - \dfrac{1}{1-a} = -\dfrac{a^{n+1}}{1-a}$ et $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1-a^{n+2}}{1-a} - \dfrac{1}{1-a} = -\dfrac{a^{n+2}}{1-a}$

donc $z_{n+1} - \omega = a\,\dfrac{a^{n+1}}{1-a} = a\,(z_n - \omega)$

La transformation S d'écriture complexe $z' - \omega = a\,(z - \omega)$ est la similitude directe de centre $\Omega$ de rapport $|a| = \rho$ et d'angle $\theta$.
$A_{n+1}$ est donc l'image de $A_n$ par la similitude directe de centre $\Omega$ de rapport $\rho$ et d'angle $\theta$.

*b.* $S(\Omega) = \Omega$ et pour tout $n \geq 0$, $S(A_n) = A_{n+1}$, donc $\Omega A_{n+1} = \rho\, \Omega A_n$ donc la suite $(\Omega A_n)$ est donc une suite géométrique de raison $\rho$, donc $\Omega A_n = \rho^n\, \Omega A_0$

*c.* $0 \leq \rho \leq 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho^n = 0$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} \Omega A_n = 0$ donc $A_n$ tend vers $\Omega$.

*d.* Pour construire l'image M' du point M par la similitude de centre $\Omega$ de rapport 0,9 et d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$, il suffit de tracer $(\Omega M)$, puis le point $M_1$ image de M par l'homothétie de centre $\Omega$ de rapport 0,9 et enfin l'image M' de $M_1$ par la rotation de centre $\Omega$ d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$.