Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel. On note :

X_n l'événement « la marque X est utilisée le mois n »,
Y_n l'évènement « la marque Y est utilisée le mois n »,
Z_n l'évènement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des évènements X_n Y_n, Z_n sont notées respectivement x_n, y_n, z_n. La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition. Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant :

50 % de chance de rester fidèle à cette marque,
40 % de chance d'acheter la marque Y,
10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant :

30 % de chance de rester fidèle à cette marque,
50 % de chance d'acheter la marque X,
20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant :

70 % de chance de rester fidèle à cette marque,
10 % de chance d'acheter la marque X,
20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. *a.* Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n

On admet que : $y_{n+1} = 0,4\,x_n + 0,3\,y_n + 0,2\,z_n$ et que $z_{n+1} = 0,1\,x_n + 0,2\,y_n + 0,7\,z_n$.

b. Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et j des entiers naturels. A, B et U des matrices R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$
Traitement	Tant Que $i < n$ U prend la valeur A × U + B i prend la valeur $i + 1$ Fin Tant Que
Sortie	Afficher U

a. Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.

b. Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.

On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice I – A.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

a. Démontrer que $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$. En déduire que $C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$

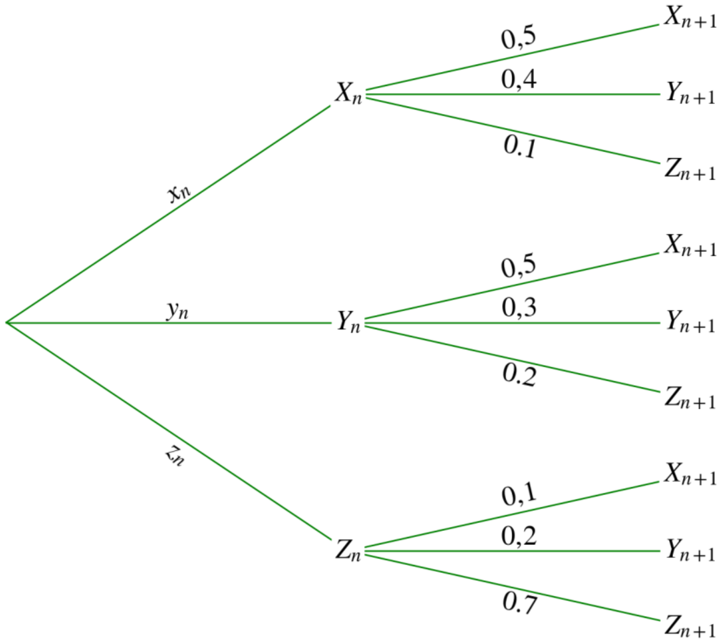
4. On note V la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A \times V_n$.

b. On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.

Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai ?

CORRECTION



1. *a.* $x_{n+1} = 0{,}5\, x_n + 0{,}4\, y_n + 0{,}1\, z_n$
$y_{n+1} = 0{,}4\, x_n + 0{,}3\, y_n + 0{,}2\, z_n$
$z_{n+1} = 0{,}1\, x_n + 0{,}2\, y_n + 0{,}7\, z_n$.

b. $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$

$x_{n+1} = 0{,}5\, x_n + 0{,}4\, y_n + 0{,}1\,(1 - x_n - y_n)$
soit $x_{n+1} = 0{,}4\, x_n + 0{,}3\, y_n + 0{,}1$

$y_{n+1} = 0{,}4\, x_n + 0{,}3\, y_n + 0{,}2\,(1 - x_n - y_n)$
soit $y_{n+1} = 0{,}2\, x_n + 0{,}1\, y_n + 0{,}2$

2. *a.* $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

i	0	1	2	3
U	$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}39 \\ 0{,}33 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}355 \\ 0{,}311 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}3353 \\ 0{,}3021 \end{pmatrix}$

Si $n = 1$, l'algorithme affiche $\begin{pmatrix} 0{,}39 \\ 0{,}33 \end{pmatrix}$

Si $n = 3$, l'algorithme affiche $\begin{pmatrix} 0{,}3353 \\ 0{,}3021 \end{pmatrix}$

b. Avril correspond à $n = 3$ donc la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril est 0,3353

3. *a.* $C = A \times C + B \Leftrightarrow C - A \times C = B \Leftrightarrow I \times C - A \times C = B \Leftrightarrow (I - A) \times C = B \Leftrightarrow N \times C = B$.

b. $N \times C = B \Leftrightarrow C = N^{-1} \times B \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{9{,}5}{23} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$

4. *a.* $V_{n+1} = U_{n+1} - C = A \times U_n + B - C \Leftrightarrow V_{n+1} = A \times U_n + B - (A \times C + B)$
$\Leftrightarrow V_{n+1} = A \times U_n - A \times C \Leftrightarrow V_{n+1} = A \times (U_n - C) \Leftrightarrow V_{n+1} = A \times V_n$

b. Mai correspond à $n = 4$, $U_4 = A^4 \times (U_0 - C) + C$ donc $U_4 = \begin{pmatrix} 0{,}3794 \\ 0{,}30853 \end{pmatrix}$.

La probabilité de l'événement « la marque X est utilisée au mois de mai » est 0,3794, celle de l'événement « la marque Y est utilisée au mois de mai » est 0,30853. Z_n l'évènement « la marque Z est utilisée au mois de mai » 1 – 0,3794 – 0,30853 soit 0,31207.