Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :
B_1, 6 000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,
B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3 800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

A : $\dfrac{\binom{120}{3}+\binom{5\,800}{7}}{\binom{6\,000}{10}}$ B : $\dfrac{3}{120}$ C : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{120}{6\,000}\right)^3\times\left(\dfrac{5\,800}{6\,000}\right)^7$ D : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{3}{120}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{5\,880}\right)^7$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

A : 0,98 B : $\dfrac{0,4\times0,95}{0,6\times0,98+0,6\times0,02}$ C : $0,6\times0,98$ D : $\dfrac{0,6\times0,98}{0,6\times0,98+0,4\times0,95}$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0005$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est : $p([0\,;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

A : $e^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$ B : $e^{\frac{5}{4}}$ C : $1-e^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$ D : $e^{-\frac{2\,000}{2\,500}}$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule : $E = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.

a. L'intégrale est égale à :

A : $\lambda\dfrac{t^2}{2}e^{-\lambda t}$ B : $-t\ e^{-\lambda t}-\dfrac{e^{-\lambda t}}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}$ C : $\lambda t e^{-\lambda t}-\lambda e^{-\lambda t}-\lambda$ D : $t e^{-\lambda t}-\dfrac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}$

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :
A : 3 500 B : 2 000 C : 2 531,24 D : 3 000

CORRECTION

Première partie

1. On a une succession de 10 expériences aléatoires, identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

succès : l'étiquette comporte une adresse erronée ($p = \dfrac{120}{6\,000}$)

échec : l'étiquette ne comporte pas une adresse erronée ($q = 1-\dfrac{120}{6\,000} = \dfrac{5\,880}{6\,000}$)

donc la variable aléatoire qui représente le nombre d'étiquettes comportant une adresse erronée suit une loi binomiale de paramètres ($10\,;\dfrac{120}{6\,000}$)

$$p(X=3) = \binom{10}{3}\times\left(\frac{120}{6\,000}\right)^3\times\left(\frac{5\,800}{6\,000}\right)^7$$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :
La probabilité que l'étiquette comporte une adresse exacte est $p(E) = p(E\cap B_1) + p(E\cap B_2)$

$$p(E) = p_{B_1}(E)\times p(B_1) + p_{B_2}(E)\times p(B_1) = \frac{5\,880}{6\,000}\times\frac{6\,000}{10\,000}+\frac{3\,800}{4\,000}\times\frac{4\,000}{10\,000} = 0,6\times0,98+0,4\times0,95$$

$$p_E(B_1) = \frac{p(E\cap B_1)}{p(E)} = \frac{0,6\times0,98}{0,6\times0,98+0,4\times0,95}$$

Deuxième partie

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, d x = \left[- e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

$p(X > t) = 1 - p(X \leq t) = e^{-\lambda t}$

donc $p(X > 2\,500) = e^{-0{,}005 \times 2\,500} = e^{-\frac{2\,500}{2\,000}}$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule : $E = \lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, d x$.

a. L'intégrale est égale à :

En prenant :

$u'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $\quad u(x) = - e^{-\lambda x}$

$v(x) = x$ $\quad v'(x) = 1$

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, d x = \left[- x e^{-\lambda x}\right]_0^t - \int_0^t - e^{-\lambda x}\, d x$$

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, d x = - t e^{-\lambda t} - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^t$$

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, d x = - t e^{-\lambda t} - \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, d x = \frac{1}{\lambda} - t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

Soit $X = \lambda t$, $\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} X = +\infty$

$t e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda} X e^{-X}$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} t e^{-\lambda t} = 0$

$\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda} e^{-X}$ or $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} = 0$

donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, d x = \frac{1}{\lambda} = 2\,000$