Quand on a à chercher une limite et qu'il y a une difficulté, il faut distinguer 2 cas :

- x tend vers ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$) : on met alors x avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE
- x tend vers une valeur finie a : on met alors $x - a$ en facteur avec le plus grand exposant possible et on SIMPLIFIE.

EXERCICE 1

$f(x) = \dfrac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4}$ $\qquad$ $D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

Déterminer les limites de *f* en $-\infty$ et $+\infty$.

x tend vers ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$) : on met alors x avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE

$f(x) = \dfrac{x^3\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)}$ donc $f(x) = x\,\dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)}$

Quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ alors $\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)$ tend vers 1 et $\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)$ tend vers 1 donc

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Déterminer les limites de *f* en -2 et 2.

$f(x) = \dfrac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4}$

Quand x tend vers -2 alors $x^3 - x - 6$ tend vers -12 et $x^2 - 4$ tend vers 0 donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe
$x^2 - 4$ est une expression du second degré qui s'annule en -2 et 2
donc $x^2 - 4 > 0$ si $x < -2$ et $x^2 - 4 < 0$ si $-2 < x < 2$ donc 2 cas se présentent :

***x* tend vers -2 et $x < -2$**

alors $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x^2 - 4 = 0^+$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x^3 - x - 6 = -12$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$ (d'après la règle des signes)

***x* tend vers -2 et $-2 < x < 2$**

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} x^2 - 4 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} x^3 - x - 6 = -12$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$ (d'après la règle des signes)

on n'a pas à traiter le cas $x > 2$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers -2 en restant plus grand que 2

Quand x tend vers 2 alors $x^3 - x - 6$ tend vers 0 et $x^2 - 4$ tend vers 0 donc on une forme indéterminée.
x tend vers une valeur finie 2 : on met alors $x - 2$ en facteur avec le plus grand exposant possible et on SIMPLIFIE.
$x^3 - x - 6 = (x - 2)(a\,x^2 + b\,x + c)$
$x^3 - x - 6 = a\,x^3 + (-2\,a + b)\,x^2 + (-2\,b + c)\,x - 2\,c$
donc par identification : $a = 1$; $-2\,a + b = 0$; $-2\,b + c = -1$ et $-2\,c = -6$
donc $a = 1$; $b = 2$ et $c = 3$
$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2\,x + 3)$
$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

donc $f(x) = \dfrac{(x-2)(x^2 + 2\,x + 3)}{(x-2)(x+2)}$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x + 3}{x + 2}$

Quand x tend vers 2 alors $x^2 + 2\,x + 3$ tend vers 1 et $x + 2$ tend vers 4 donc $f(x)$ tend vers $\dfrac{11}{4}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{11}{4}$.

EXERCICE 2

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 7x - 8}$ $\quad D_f =]-\infty ; -8[\cup]-8 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

Déterminer les limites de *f* en – ∞ et + ∞.

x tend vers ∞ (+ ∞ ou – ∞) : on met alors x avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE

$$f(x) = \frac{x^2\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}$$

donc $f(x) = \dfrac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}$

Quand x tend vers – ∞ ou vers + ∞ alors $\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$ tend vers 2 et $\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = 2 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} x\,\frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = -\infty \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = 2 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} x\,\frac{\left(2 - \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = +\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Déterminer les limites de *f* en – 8 et 1.

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 7x - 8}$

Quand x tend vers – 8 alors :
$2x^2 - 5x + 3$ tend vers 171 et $x^2 + 7x - 8$ tend vers 0
donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe

$x^2 + 7x - 8$ est une expression du second degré qui s'annule en – 8 et 1
donc $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x < -8$ et $x^2 + 7x - 8 < 0$ si $-8 < x < 1$
donc 2 cas se présentent :

***x* tend vers – 8 et *x* < – 8**

alors $\lim\limits_{\substack{x\to-8\\x<-8}} x^2 + 7x - 8 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-8\\x<-8}} 2x^2 - 5x + 3 = 171$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-8\\x<-8}} f(x) = +\infty$ (d'après la règle des signes)

***x* tend vers – 2 et – 2 < *x* < 2**

$\lim\limits_{\substack{x\to-8\\x>-8}} x^2 + 7x - 8 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-8\\x>-8}} 2x^2 - 5x + 3 = 171$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-8\\x>-8}} f(x) = -\infty$ (d'après la règle des signes)

on n'a pas à traiter le cas $x > 1$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers – 8 en restant plus grand que 1

Quand x tend vers 1 alors
$2x^2 - 5x + 3$ tend vers 0 et $x^2 + 7x - 8$ tend vers 0
donc on une forme indéterminée.
x tend vers une valeur finie 1 : on met alors $x - 1$ en facteur avec le plus grand exposant possible et on SIMPLIFIE.
$2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$
$x^2 + 7x - 8 = (x-1)(x+8)$

donc $f(x) = \dfrac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+8)}$ après simplification : $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+8}$

Quand x tend vers 1 alors $2x - 3$ tend vers – 1 et $x + 8$ tend vers 9 donc $f(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{9}$ soit $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\dfrac{1}{9}$.

EXERCICE 3

$f(x) = \dfrac{-2x^2+5x+3}{x^2+7x-8}$

$D_f =]-\infty\,;-8[\cup]-8\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

Déterminer les limites de *f* en – ∞ et + ∞.

x tend vers ∞ (+ ∞ ou – ∞) : on met alors *x* avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE

$f(x) = \dfrac{x^2\left(-2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{7}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)}$

donc $f(x) = \dfrac{\left(-2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(1+\dfrac{7}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)}$

Quand *x* tend vers – ∞ ou vers + ∞ alors $\left(-2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$ tend vers 2 et $\left(1+\dfrac{7}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)$ tend vers 1 donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(1+\dfrac{7}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)} = -2$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x\dfrac{\left(2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(1+\dfrac{7}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(-2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(1+\dfrac{7}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)} = -2$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{\left(-2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{\left(1+\dfrac{7}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Déterminer les limites de *f* en – 8 et 1.

$f(x) = \dfrac{-2x^2+5x+3}{x^2+7x-8}$

Quand *x* tend vers – 8 alors :
$-2x^2+5x+3$ tend vers – 8,5 et x^2+7x-8 tend vers 0
donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe

x^2+7x-8 est une expression du second degré qui s'annule en – 8 et 1
donc $x^2+7x-8>0$ si $x<-8$ et $x^2+7x-8<0$ si $-8<x<1$ et $x^2+7x-8>0$ si $x>1$
donc 2 cas se présentent :

***x* tend vers – 8 et *x* < – 8**

alors $\lim\limits_{\substack{x\to-8\\x<-8}} x^2+7x-8 = 0^+$

et $\lim\limits_{\substack{x\to-8\\x<-8}} -2x^2+5x+3 = -8{,}5$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-8\\x<-8}} f(x) = -\infty$ (d'après la règle des signes)

***x* tend vers – 8 et – 8 < *x* < 1**

$\lim\limits_{\substack{x\to-8\\x>-8}} x^2+7x-8 = 0^-$

et $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x > -8}} -2x^2 + 5x + 3 = -8,5$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -8 \\ x > -8}} f(x) = +\infty$ (d'après la règle des signes)

on n'a pas à traiter le cas $x > 1$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers – 8 en restant plus grand que 1

Quand x tend vers 1 alors
$-2x^2 + 5x + 3$ tend vers – 8,5 et $x^2 + 7x - 8$ tend vers 0
donc $f(x)$ tend vers ∞ mais il faut déterminer le signe

$x^2 + 7x - 8$ est une expression du second degré qui s'annule en – 8 et 1 donc $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x < -8$ et $x^2 + 7x - 8 < 0$ si $-8 < x < 1$ et $x^2 + 7x - 8 > 0$ si $x > 1$
donc 2 cas se présentent :

x tend vers 1 et $-8 < x < 1$

alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^2 + 7x - 8 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} -2x^2 + 5x + 3 = -8,5$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ (d'après la règle des signes)

x tend vers 1 et $x > 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x^2 + 7x - 8 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} -2x^2 + 5x + 3 = -8,5$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$ (d'après la règle des signes)

on n'a pas à traiter le cas $x < -8$, car on ne peut avoir simultanément, x tend vers 1 en restant plus petit que – 8.