Polynésie septembre 2007

EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

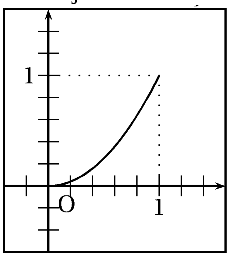
On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle [0 ; 1] et vérifiant les conditions (P_1), (P_2) et (P_3) suivantes :

- (P_1) : f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 1].
- (P_2) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
- (P_3) : pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $f(x) \leq x$.

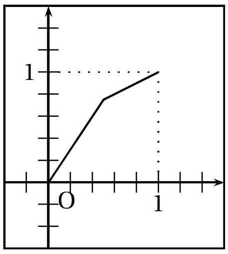
Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on note (C_f) la courbe représentative d'une fonction f de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation $y = x$.

À toute fonction f de (E), on associe le nombre réel $I_f = \int_0^1 [x - f(x)]\, dx$.

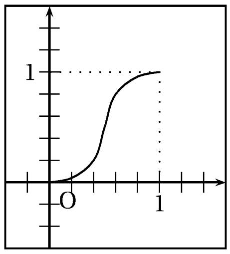
1. a. Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E).
La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.



Courbe n° 1



Courbe n° 2



Courbe n° 3

b. Montrer que, pour toute fonction f de (E), $I_f \geq 0$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $h(x) = 2^x - 1$. (On rappelle que, pour tout x réel, $2^x = e^{x \ln 2}$).

a. Montrer que la fonction h vérifie les conditions (P_1) et (P_2).

b. Soit ϕ la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $\phi(x) = 2^x - x - 1$.
Montrer que, pour tout x de [0 ; 1], $\phi(x) \leq 0$. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction ϕ sur [0 ; 1]).
En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).

c. Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.

3. Soit P une fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $P(x) = a x^2 + b x + c$ où a, b et c sont trois nombres réels tels que $0 < a < 1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels a, b et c pour que la fonction P appartienne à l'ensemble (E) et que $I_p = I_h$.

a. Montrer que la fonction P vérifie la propriété (P_2) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $P(x) = a x^2 + (1 - a) x$.
Montrer que toute fonction P définie sur [0 ; 1] par $P(x) = a x^2 + (1 - a) x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E).

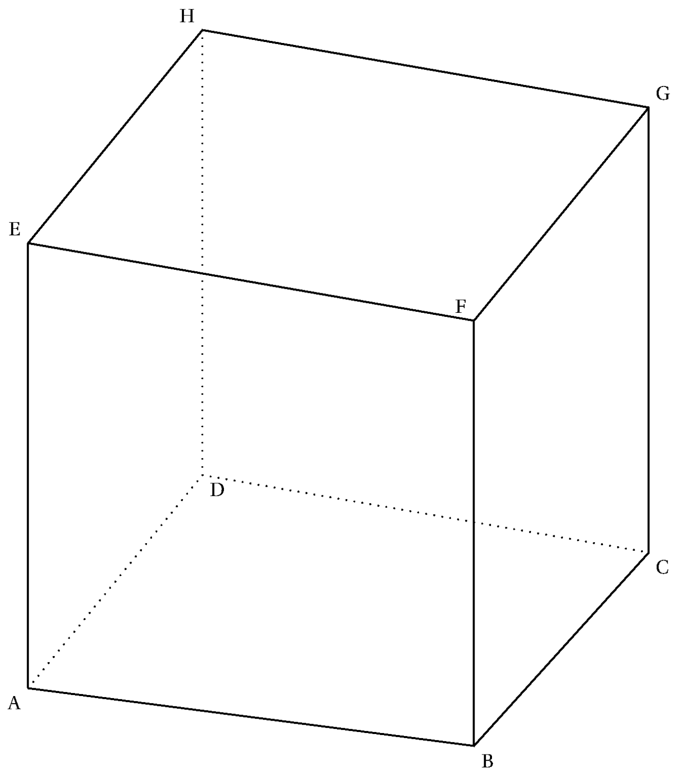
b. Exprimer en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P.

c. Montrer qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_p = I_h$. Quelle est cette valeur ?

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.

On choisit le repère orthonormal $(D ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$



1. *a*. Donner les coordonnées des points A, C et E.

b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système {(C ; 2), (E ; 1)}.

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

2. Soit (a, b) un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM} = a\,\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN} = b\,\overrightarrow{DL}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple (a, b) vérifie le système
$$\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$$

b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :
40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.

La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.

Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

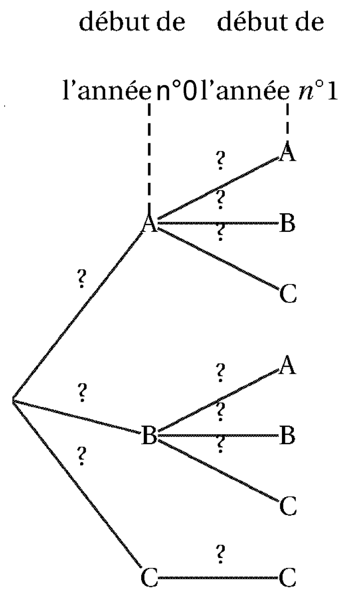
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n.

Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année n° 0) on pose :

$$p_0 = 0{,}40,\ q_0 = 0{,}41 \text{ et } r_0 = 0{,}19.$$



1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante.
Aucune justification n'est demandée pour cette question.

2. a. Montrer que $p_1 = 0{,}363$ puis calculer q_1 et r_1.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,
$$p_{n+1} = 0{,}6\,p_n + 0{,}3\,q_n \text{ et } q_{n+1} = 0{,}3\,p_n + 0{,}6\,q_n$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.

a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

c. En déduire les limites des suites (p_n) et (q_n). Interpréter le résultat.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe. Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport λ et d'angle θ. Soit :

- les points A′ et B′, images respectives des points A et B par la similitude σ;
- les points I, milieu du segment [A′ B] et J, milieu du segment [A B′] ;
- le point M milieu du segment [AA′] ;
- le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AR) et le point H′ image du point H par la similitude σ.

Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6+4\text{ i}$, le point B a pour affixe $2+4\text{ i}$, et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe 4 i.

La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes des points A′, B′ et H′.
2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

Partie B. Étude du cas général

1\. *a*. Montrer que H′ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (A′ B′).

b. Montrer que $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On admet que $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$.

c. En déduire que $\frac{MJ}{MI} = \frac{OH'}{OH}$ et que $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2\. On appelle *s* la similitude directe qui transforme M en O et I en H. On note K l'image du point J par la similitude *s*.

a. Montrer que OK= OH′, puis que $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b. En déduire que le point H′ est l'image du point J par la similitude *s*.

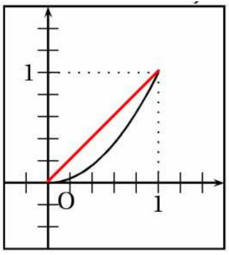
3\. Montrer que $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'}) = (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

CORRECTION

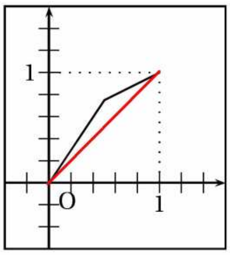
EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

1. *a.* Les conditions (P_1) et (P_2) sont vérifiées par les trois courbes.

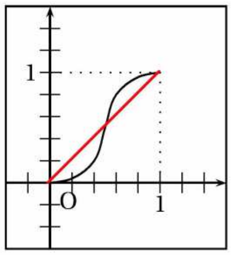
La condition P_3 n'est vérifiée que par la première courbe : le segment de droite $y = x$ est tracé sur chaque graphique et seule la courbe 1 est en dessous de la droite $y = x$



Courbe n° 1



Courbe n° 2



Courbe n° 3

b. Toute fonction f de (E), est continue sur l'intervalle [0 ; 1], pour tout réel x de l'intervalle [0 ;1], $f(x) \leq x$ donc pour tout x de [0 ; 1], $x - f(x) \geq 0$ et $0 \leq 1$ donc $\int_0^1 [x - f(x)]\,\mathrm{d}x \geq 0$.

2. *a.* h est continue sur l'intervalle [0 ; 1] (composée de fonctions continues sur [0 ; 1]) et ln 2 > 0 donc les fonctions $x \to x \ln 2$ et $x \to \mathrm{e}^x$ sont strictement croissantes sur l'intervalle [0 ; 1] donc leur composée h est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 1].
$h(0) = \mathrm{e}^0 - 1 = 0$ et $h(1) = 2 - 1 = 1$ donc h vérifie les conditions (P_1) et (P_2).
b. Soit ϕ la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $\phi(x) = 2^x - x - 1$.
ϕ est définie continue dérivable sur [0 ; 1] (composée de fonctions continues dérivables sur [0 ; 1])

$\phi'(x) = \ln 2\, \mathrm{e}^{x \ln 2} - 1$, pour tout x de [0 ; 1], $\ln 2\, \mathrm{e}^{x\ln 2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0\,;1]$ et $\mathrm{e}^{x \ln 2} \geq \dfrac{1}{\ln 2}$

$\dfrac{1}{\ln 2} \in [0 ; 1]$ donc $\phi'\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) = 0$; $\phi'(x) \geq 0$ si $x \in \left[\dfrac{1}{\ln 2} ; 1\right]$, ϕ est croissante sur $\left[\dfrac{1}{\ln 2} ; 1\right]$, pour tout x de $\left[\dfrac{1}{\ln 2} ; 1\right]$, $\phi(x) \leq \phi(1)$ soit pour tout x de $\left[\dfrac{1}{\ln 2} ; 1\right]$, $\phi(x) \leq 0$

$\phi'(x) \leq 0$ si $x \in \left[0 ; \dfrac{1}{\ln 2}\right]$, ϕ est croissante sur $\left[0 ; \dfrac{1}{\ln 2}\right]$, pour tout x de $\left[0 ; \dfrac{1}{\ln 2}\right]$, $\phi(x) \leq \phi(0)$ soit pour tout x de $\left[0 ; \dfrac{1}{\ln 2}\right]$, $\phi(x) \leq 0$ donc pour tout x de [0 ; 1], $\phi(x) \leq 0$.
$\phi(x) = h(x) - x$ donc pour tout x de [0 ; 1], $h(x) \leq x$ donc h vérifie la condition P_3, la fonction h appartient à l'ensemble (E).

c. $I_h = \int_0^1 [x - h(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -\phi(x)\,\mathrm{d}x$

$\phi(x) = \mathrm{e}^{x \ln 2} - x - 1$ donc une primitive de ϕ est la fonction Φ définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $\Phi(x) = \dfrac{1}{\ln 2}\mathrm{e}^{x \ln 2} - \dfrac{1}{2}x^2 - x$

$I_h = -\Phi(1) + \Phi(0) = -\dfrac{1}{\ln 2}\mathrm{e}^{\ln 2} + \dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{1}{\ln 2} = -\dfrac{2}{\ln 2} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{\ln 2}$ donc $I_h = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2}$.

3. *a.* la fonction P vérifie la propriété (P_2) si et seulement si, $P(0) = 0$ et $P(1) = 1 \Leftrightarrow c = 0$ et $a + b + c = 1 \Leftrightarrow c = 0$ et $b = 1 - a \Leftrightarrow$ pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $P(x) = a\,x^2 + (1 - a)\,x$.

Soit la fonction P définie sur [0 ; 1] par $P(x) = a\,x^2 + (1 - a)\,x$ avec $0 < a < 1$, P vérifie la condition (P_2).

P est un polynôme donc est dérivable sur [0 ; 1] et $P'(x) = 2\,a\,x + 1 - a$
$0 < a < 1$ donc pour tout x de [0 ; 1], $P'(x) \geq 1 - a > 0$ donc P est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 1], P vérifie la condition (P_1).
$x - P(x) = x - a\,x^2 - (1 - a)\,x = -a\,x^2 + a\,x = a\,x\,(1 - x)$ or $x \in [0\,;1]$ donc $1 - x \geq 0$, $a > 0$ donc pour tout réel x de l'intervalle [0 ;1], $P(x) \leq x$, P vérifie la condition (P_3).
La fonction P appartient à (E).

b. $I_P = \int_0^1 [x - P(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 a\,(x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[a\left(\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3\right)\right]_0^1 = a\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{a}{6}$

c. $I_P = I_h \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2} = \dfrac{a}{6} \Leftrightarrow a = 9 - \dfrac{6}{\ln 2}$, $0 < 9 - \dfrac{6}{\ln 2} < 1$ donc il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$ et

$P(x) = \left(9 - \dfrac{6}{\ln 2}\right)x^2 + \left(8 + \dfrac{6}{\ln 2}\right)$

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

1. *a*. $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ donc $\overrightarrow{DA} = 3\vec{i}$, A a pour coordonnées (3 ; 0 ; 0) de même C a pour coordonnées (0 ; 3 ; 0) et E a pour coordonnées (3 ; 0 ; 3)

b. Le point L barycentre du système {(C ; 2), (E ; 1)} a pour coordonnées $\left(\frac{2x_C + x_E}{2+1}; \frac{2y_C + y_E}{2+1}; \frac{2z_C + z_E}{2+1}\right)$ soit (1 ; 2 ; 1)

c. $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées (0 ; 0 ; 3) et $\overrightarrow{DL}$ a pour coordonnées (1 ; 2 ; 1)

2. *a*. M est le point de coordonnées (x ; y ; z) telles que $\overrightarrow{AM} = a\,\overrightarrow{AE}$ soit $x - 3 = 0$ et $y = 0$ et $z = 3a$

M a pour coordonnées (3 ; 0 ; 3 a) de même N a pour coordonnées (b ; 2 b ; b) donc $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées ($b - 3$; 2 b ; $b - 3a$)

le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AE} = 0$ et $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DL} = 0$

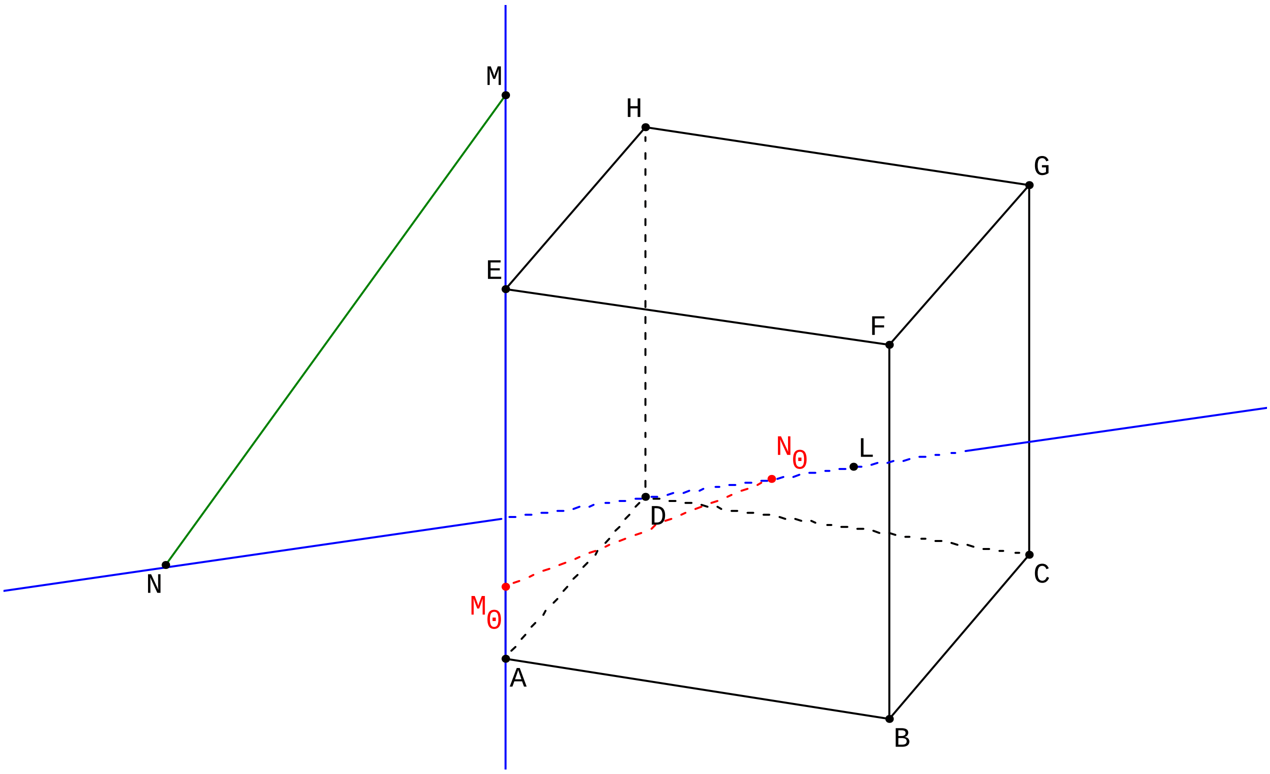
$\Leftrightarrow 3(b - 3a) = 0$ et $(b - 3) + 2 \times 2b + (b - 3a) = 0 \Leftrightarrow b - 3a = 0$ et $6b - 3a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 6a = 1 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{3}{5} \end{cases}$, il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL). M_0 a pour coordonnées $\left(3; 0; \frac{3}{5}\right)$, N_0 a pour coordonnées $\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

c. M a pour coordonnées (3 ; 0 ; 3 a) donc M_0 a pour coordonnées $\left(3; 0; \frac{3}{5}\right)$, de même N a pour coordonnées (b ; 2 b ; b) donc N_0 a pour coordonnées $\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

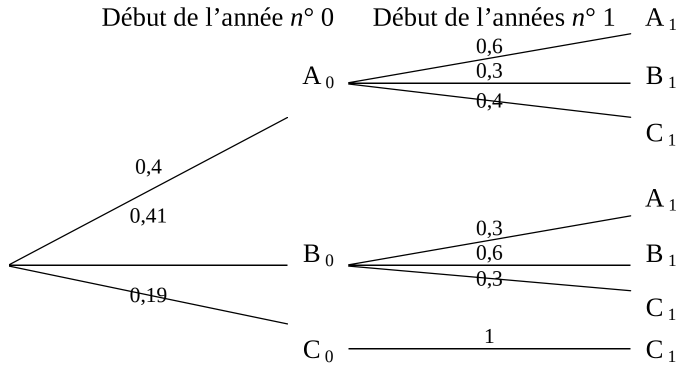
$M_0N_0^{\,2} = \left(3 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{144 + 36}{25} = \frac{180}{25}$ donc $M_0N_0 = \frac{\sqrt{180}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

La plus courte distance entre (AE) et (DL) est égale à $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.



EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

1.

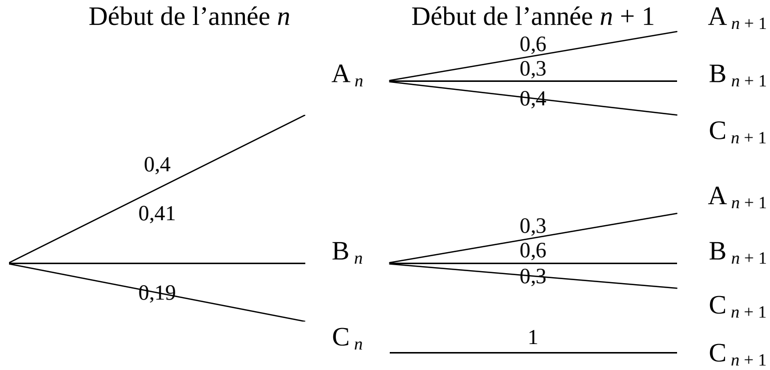


2. *a.* $p_1 = p(A_1) = p(A_0 \cap A_1) + p(B_0 \cap A_1) = 0,4 \times 0,6 + 0,41 \times 0,3 = 0,363$

$q_1 = p(B_1) = p(A_0 \cap B_1) + p(B_0 \cap B_1) = 0,4 \times 0,3 + 0,41 \times 0,6 = 0,366$

$r_1 .= 1 - p_1 - q_1 = 0,271$, on pouvait aussi calculer $r_1 = p(A_0 \cap C_1) + p(B_0 \cap C_1) + p(C_0 \cap C_1)$

b.



pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1})$

$p_{n+1} = p(A_{n+1} / A_n) \times p(A_n) + p(A_{n+1} / B_n) \times p(B_n)$ donc $p_{n+1} = 0,6\, p_n + 0,3\, q_n$

$q_{n+1} == p(A_n \cap B_{n+1}) + p(B_n \cap B_{n+1}) = p(B_{n+1} / A_n) \times p(A_n) + p(B_{n+1} / B_n) \times p(B_n)$ donc $q_{n+1}\, 0,3\, p_n + 0,6\, q_n$

3. *a.* $S_{n+1} = q_{n+1} + p_{n+1} = 0,3\, p_n + 0,6\, q_n + 0,6\, p_n + 0,3\, q_n$

$S_{n+1} = 0,9\, p_n + 0,9\, q_n = 0,9\, S_n$ donc S_n est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme $S_0 = p_0 + q_0 = 0,81$

pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = 0,9^n \times 0,81$.

(D_n) est une suite géométrique de raison 0,3 de premier terme $D_0 = q_0 - p_0 = 0,01$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $D_n = 0,3^n \times 0,01$.

b. $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$, $-1 < 0,3 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n = 0$.

c. $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$ donc $2\, q_n = S_n + D_n$ et $2\, p_n = S_n - D_n$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n = 0$. donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0$. A long terme, les plantes de type A et B disparaissent, seule demeure la plante C.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

Partie A. Étude d'un exemple

1. σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$

O est le centre de σ donc $b = 0$, $|\,a\,| = \frac{1}{2}$ et $\arg a = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$ donc $a = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{i}$

σ a pour écriture complexe $z' = \frac{1}{2}\mathrm{i}\,z$

$\sigma(A) = A'$ est le point d'affixe $\frac{1}{2}\mathrm{i}\,(-6 + 4\,\mathrm{i}) = -2 - 3\,\mathrm{i}$

$\sigma(B) = B'$ est le point d'affixe $\frac{1}{2}\mathrm{i}\,(2 + 4\,\mathrm{i}) = -2 + \mathrm{i}$

$\sigma(H) = H'$ est le point d'affixe $\frac{1}{2}\mathrm{i} \times (4\,\mathrm{i}) = -2$

2. I est le milieu du segment [A′ B] donc a pour affixe $z_{\mathrm{I}} = \frac{z_{\mathrm{A'}} + z_{\mathrm{B}}}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{i}$

J est le milieu du segment [A B′] donc a pour affixe $z_{\mathrm{J}} = \frac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B'}}}{2} = -4 + \frac{5}{2}\mathrm{i}$

donc $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ a pour affixe $z_{\mathrm{J}} - z_{\mathrm{I}} = -4 + 2\,\mathrm{i}$

$\overrightarrow{\mathrm{HH'}}$ a pour affixe $z_{\mathrm{H'}} - z_{\mathrm{H}} = -2 - 4\,\mathrm{i}$

$\overrightarrow{\mathrm{HH'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = (-4) \times (-2) + 2 \times (-4) = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{HH'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ sont orthogonaux, la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

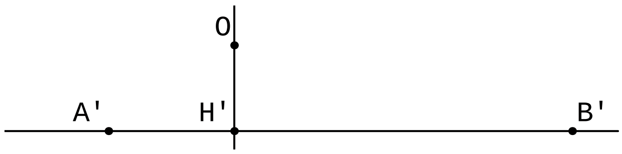
Partie B. Étude du cas général

1. *a*. H est le point de (AB) tel que les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires

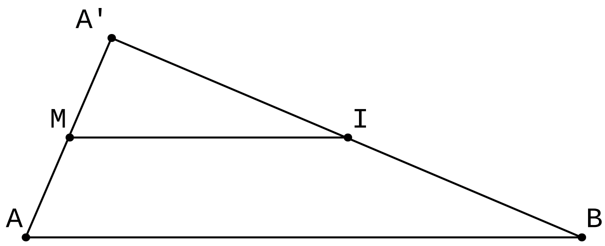
Une similitude conserve l'alignement donc transforme (AB) en (A'B') et (OH) en (OH') (O est le centre de σ donc O' = O) et H' est le point d'intersection des droites (OH') et (A'B')

Une similitude conserve les angles orientés donc en particulier les angles droits donc les droites (OH') et (A'B') sont perpendiculaires

donc H′ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (A′ B′).



b. Dans le triangle ABA', le point M est le milieu du segment [AA′] et le point I est le milieu du segment [A′ B] donc $\overrightarrow{\mathrm{MI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.



c. σ est une similitude directe de centre O, de rapport λ et d'angle θ.

σ : H $\to$ H' et O $\to$ O donc $\frac{\mathrm{OH'}}{\mathrm{OH}} = \lambda$ et $(\overrightarrow{\mathrm{OH}}, \overrightarrow{\mathrm{OH'}}) = \theta + k \times 2\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\overrightarrow{\mathrm{MI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ donc $\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{MI}} = \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}}$ or σ : A $\to$ A' et B $\to$ B' donc $\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}} = \lambda$ donc $\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{MI}} = \lambda$

donc $\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{MI}} = \frac{\mathrm{OH'}}{\mathrm{OH}}$

de plus $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}) = \theta + k \times 2\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ or $\overrightarrow{\mathrm{MI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ donc $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}) = (\overrightarrow{\mathrm{MI}}, \overrightarrow{\mathrm{MJ}}) + k \times 2\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

donc $(\overrightarrow{\mathrm{MI}}, \overrightarrow{\mathrm{MJ}}) = (\overrightarrow{\mathrm{OH}}, \overrightarrow{\mathrm{OH'}}) + k \times 2\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2 . *a*. s : M $\to$ O
I $\to$ H
J $\to$ K

donc $\frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OH}} = \frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{MI}} = \frac{\mathrm{OH'}}{\mathrm{OH}}$ donc $\frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OH}} = \frac{\mathrm{OH'}}{\mathrm{OH}}$ soit OK = OH' de plus $(\overrightarrow{\mathrm{MI}}, \overrightarrow{\mathrm{MJ}}) = (\overrightarrow{\mathrm{OH}}, \overrightarrow{\mathrm{OK}}) + k \times 2\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b. $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) + k \times 2\pi$ et $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

donc $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. donc $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + (\overrightarrow{OH'}, \overrightarrow{OK}) = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

donc $(\overrightarrow{OH'}, \overrightarrow{OK}) = 0 + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OH'}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires de même sens or OK = OH' donc $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OK}$ soit K = H'. Le point H′ est l'image du point J par la similitude *s*.

3. s :
$$\begin{array}{lcl} M & \to & O \\ I & \to & H \\ J & \to & H' \end{array}$$
donc HH' = λ IJ et $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'}) = \theta + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

de même OH = λ MI et $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH}) = \theta + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'}) = (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc les droites (MI) et (AB) sont parallèles or H est la projection orthogonale de O sur (AB) donc les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires donc les droites (OH) et (MI) sont perpendiculaires.

L'angle $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ donc comme $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'}) = (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. alors $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'})$a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ donc la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).