EXERCICE 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$.

Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x)=a\,x^2$

On note **C** la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes **C** et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en annexe 1 (à rendre avec la copie) les courbes **C**, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.

2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de **C** et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$h_a(x)=\ln x-a\,x^2.$$

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de **C** et Γ_a si et seulement si $h_a(x)=0$.

2. *a.* On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et on note h la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.

Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h_a	‖	$-\infty$ ↗	$\dfrac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

b. Rappeler la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$. On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a=0,1$.

a. Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x)=0$ admet une unique solution. On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\,;+\infty\right[$.

b. Quel est le nombre de points d'intersection de **C** et $\Gamma_{0,1}$?

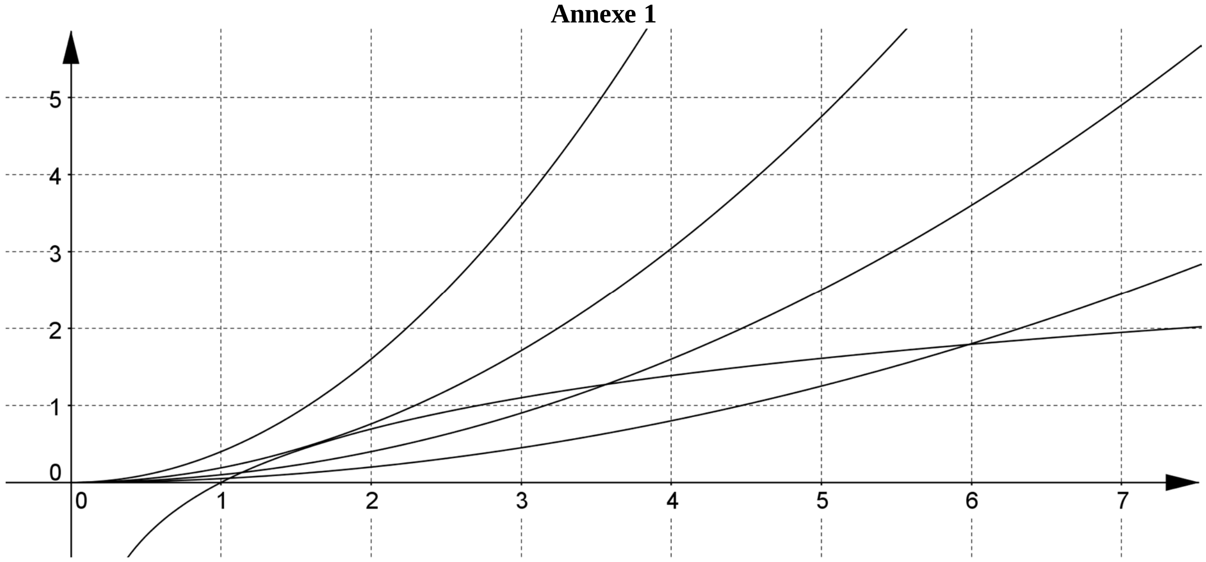
4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a=\dfrac{1}{2\,\mathrm{e}}$.

a. Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.

b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes **C** et $\Gamma_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$. Justifier.

5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles **C** et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

Annexe 1



EXERCICE 2 (5 points) Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

On rappelle que, pour tout réel a strictement positif, $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt$.

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X notée E(X), et définie par $E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda\, t\, e^{-\lambda t}\, dt$.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda\, t\, e^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que $\int_0^x \lambda\, t\, e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda\, x\, e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right)$.

2. En déduire que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en annexe 2.

1. Sur le graphique de **l'annexe 2** (à rendre avec la copie):

a. Représenter la probabilité $P(X \leq 1)$.

b. Indiquer où se lit directement la valeur de λ.

2. On suppose que $E(X) = 2$.

a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

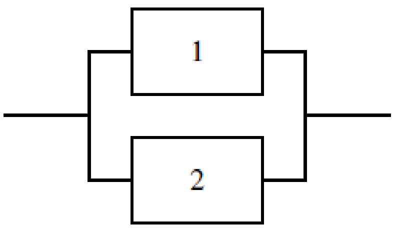
b. Calculer la valeur de λ.

c. Calculer $P(X \leq 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.

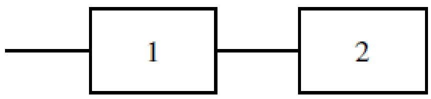
d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2.
On note D_1 l'événement «le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'événement «le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0{,}39$. Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A

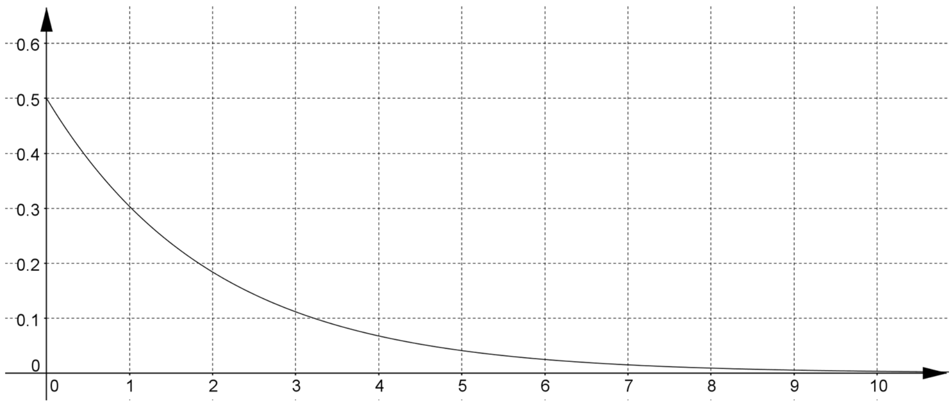


Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

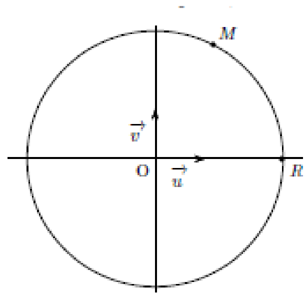
Annexe 2



EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats
Partie A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe, $[O ; \vec{u})$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.

2. Soit le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z + |z|}{2}\right)$.

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence : $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}$.

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?
3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.
a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Partie A

On considère l'algorithme suivant:

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0{,}5\, u + 0{,}5\,(k - 1) - 1{,}5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape. Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 0{,}5\, n - 1{,}5$.

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	– 0,5	– 0,75	– 0,375

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0{,}1\, u_n - 0{,}1\, n + 0{,}5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.
5. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5$.
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r\ (a,\ b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b.
On considère l'algorithme suivant:

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées:	Demander a Demander b

Traitement:	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	    Tant que $c \neq 0$
	        Affecter à a le nombre b
	        Affecter à b la valeur de c
	        Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	    Fin Tant que

Sortie:	Afficher b

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.

2. Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.
Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante:
Étape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Étape 2 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Étape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations $x' \equiv p\,x + q\ [26]$ et $0 \leq x' \leq 25$.
Étape 4 : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.

a. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.

b. Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9\,u + 26\,v = 1$.
Donner sans justifier un couple $(u,\ v)$ qui convient.

c. Démontrer que $x' \equiv 9\,x + 2\ [26]$ équivaut à $x \equiv 3\,x' + 20\ [26]$.

d. Décoder la lettre R.

2. Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu.
On sait que J est codé par D. Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).

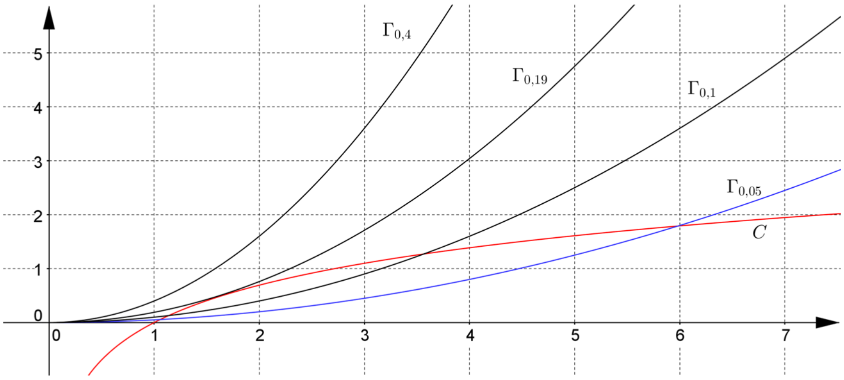
3. Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?

CORRECTION

EXERCICE 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. Conjecture : si $a < 0{,}19$, **C** et Γ_a se coupent en deux points, si $a = 0{,}19$, **C** et Γ_a se coupent en un point, si $a > 0{,}19$, **C** et Γ_a ne se coupent pas.

Partie B

1. Le point M(x ; y) appartient à l'intersection de **C** et $\Gamma_a \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln x \\ y = a\,x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \ln x = a\,x^2 \Leftrightarrow h_a(x) = 0$.

2. *a.* $h'_a(x) = \dfrac{1}{x} - 2\,a\,x = \dfrac{1 - 2\,a\,x^2}{x}$.

$x \in]\,0\,;+\infty\,[$ donc le signe de $h'_a(x)$ est le même que celui de $1 - 2\,a\,x^2$

$1 - 2\,a\,x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2\,a}$ or $a > 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2\,a}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2\,a}}$

Une expression du second degré a le signe de son terme de plus haut degré à l'extérieur des racines donc :

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2\,a}}$		$+\infty$
$1 - 2\,a\,x^2$	||	$-$	0	$+$	
$h'_a(x)$	||	$-$	0	$+$	

b. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $h_a(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - a\,x\right)$, $a > 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - a\,x\right) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h_a(x) = = -\infty$

3. *a.*

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{0{,}2}}$		$+\infty$
$h'_{0,1}(x)$	||	$-$	0	$+$	
$h_{0,1}$	|| $-\infty$		$\dfrac{-1-\ln(0{,}2)}{2}$		

La fonction $h_{0,1}$ est définie continue strictement croissante sur $\left]\,0\,;\dfrac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right]$, $\dfrac{-1-\ln(0{,}2)}{2} > 0$ donc, dans l'intervalle $\left]\,0\,;\dfrac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.

b. L'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet deux solutions sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc **C** et $\Gamma_{0,1}$ admettent deux points d'intersection dont les abscisses sont les solutions de $h_{0,1}(x) = 0$.

4. *a.* Le maximum de $h_{\frac{1}{2\,e}}$ est $\dfrac{-1-\ln(2\,a)}{2}$ quand $a = \dfrac{1}{2\,e}$ soit $\dfrac{-1-\ln\frac{1}{e}}{2}$ or $\ln\dfrac{1}{e} = -1$ donc le maximum de $h_{\frac{1}{2\,e}}$ est 0.

b.

x	0	$\dfrac{1}{\sqrt{2\,a}}$	$+\infty$
$h_{\frac{1}{2\,e}}$	|| $-\infty$	0	

Le maximum de $h_{\frac{1}{2\,e}}$ est 0 sur [0 ; + ∞ [donc l'équation $h_{\frac{1}{2\,e}}(x) = 0$ admet une seule solution donc les courbes **C** et $\Gamma_{\frac{1}{2\,e}}$ admettent un seul point d'intersection. $\frac{1}{2\,e} \approx 0{,}184$ on retrouve approximativement la conjecture initiale

5. $-1-\ln(2\,a) < 0 \Leftrightarrow \ln(2\,a) > -1 \Leftrightarrow 2\,a > e^{-1} \Leftrightarrow a > \frac{1}{2\,e}$.

Si $a > \frac{1}{2\,e}$ alors $\frac{-1-\ln(2\,a)}{2} < 0$, le maximum de h_a est strictement négatif donc l'équation $h_a(x) = 0$ n'admet pas de solution donc les courbes **C** et Γ_a n'ont aucun point d'intersection

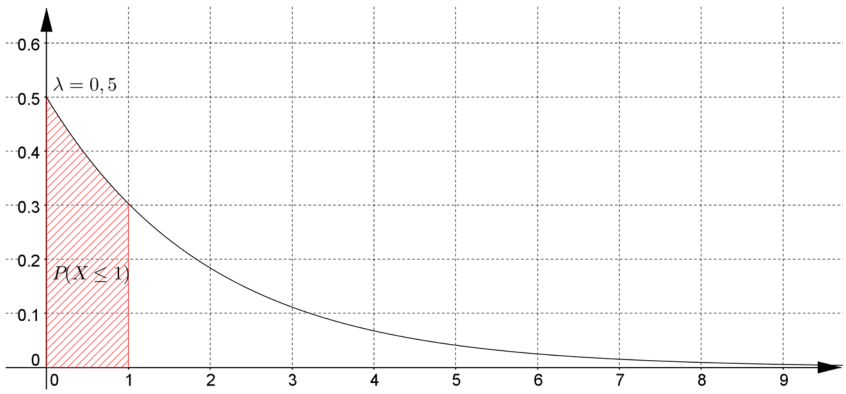
EXERCICE 2 (5 points) Commun à tous les candidats
Partie A

1. $\int_0^x \lambda\, t\, e^{-\lambda t}\, dt = F(x) - F(0) = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda\, x\, e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right)$.

2. $\lim\limits_{u \to +\infty} u\, e^{-u} = 0$, or $\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda\, x\, e^{-\lambda x} = 0$,

de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\lambda\, x\, e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right) = 1$ donc $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B
1. *a.* $P(X \le 1)$ est l'aire comprise entre la courbe de f, les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et l'axe des abscisses
b. $\lambda = f(0)$



2. *a.* E(X) = 2 donc la durée de vie moyenne d'un composant électronique est de 2 ans.

b. $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2$ donc $\lambda = 0{,}5$.

c. $P(X \le 2) = 1 - e^{-2\lambda} = 1 - e^{-1}$, soit $P(X \le 2) \approx 0{,}63$, la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure à 2 ans est 0,63.

d. La loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc $P_{X \ge 1}(X \ge 3) = P(X \ge 3 - 1) = e^{-2}$.

Partie C

1. Les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants donc $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0{,}39^2$ soit 0,1521

2. $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0{,}39 + 0{,}39 - 0{,}39^2$ donc $P(D_1 \cup D_2) = 0{,}6279$

EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats
Partie A

1. Le cercle est de centre O de rayon OM = $|z|$ donc R = $|z|$.

2. Soit P le milieu de [MR], P a pour affixe $\frac{z+|z|}{2}$, donc le milieu de [OP], est le point d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right)$ donc le point M' est le milieu de [OP].

Partie B

1. Si z_0 est un nombre réel négatif alors $|z_0| = -z_0$ donc $z_1 = 0$, d'où $z_2 = 0$ etc. $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$

2. Si z_0 est un nombre réel positif, $|z_0| = z_0$ donc $z_1 = \dfrac{z_0}{2}$ et $|z_1| = \dfrac{1}{2}|z_0|$

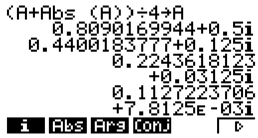
Montrons par récurrence que pour tout n de N, $z_n = \dfrac{1}{2^n} z_0$

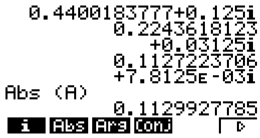
Initialisation : $|z_0| = \dfrac{1}{2^0}|z_0|$, la propriété est initialisée pour $n = 0$

Hérédité : Supposons que $z_n = \dfrac{1}{2^n} z_0$, z_0 est un nombre réel positif, donc $|z_n| = \dfrac{1}{2^n} z_0$, donc $z_{n+1} = \dfrac{1}{4} \times 2\, z_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} z_0$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $z_n = \dfrac{1}{2^n} z_0$

z_0 est un nombre réel positif, donc $|z_n| = \dfrac{1}{2^n} z_0$, $\quad -1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

3. *a.* A la calculette, en choisissant $z_0 = 1 + 2\,i$, 



donc apparemment $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

b. $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4}$, en utilisant que $|a + b| \le |a| + |b|$ donc $|z_{n+1}| \le \dfrac{|z_n| + |z_n|}{4}$ soit $|z_{n+1}| \le \dfrac{1}{2}|z_n|$.

Montrons par récurrence que pour tout n de N, $|z_n| \le \dfrac{1}{2^n}|z_0|$.

Initialisation : $\dfrac{1}{2^0}|z_0| = |z_0|$ donc $|z_0| \le \dfrac{1}{2^0}|z_0|$, la propriété est initialisée pour $n = 0$.

Hérédité : Montrons pour tout n de N que si $|z_n| \le \dfrac{1}{2^n}|z_0|$ alors $|z_{n+1}| \le \dfrac{1}{2^{n+1}}|z_0|$.

$$\boxed{\begin{array}{lll} |z_{n+1}| & \le & \frac{1}{2}|z_n| \\ & |z_n| \quad \le & \frac{1}{2^n}|z_0|. \end{array}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\begin{array}{lll} |z_{n+1}| & \le & \frac{1}{2}|z_n| \\ & \frac{1}{2}|z_n| \quad \le & \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}|z_0|. \end{array}}$$

donc $|z_n| \le \dfrac{1}{2}|z_n| \le \dfrac{1}{2^{n+1}}|z_0|$ soit $|z_{n+1}| \le \dfrac{1}{2^{n+1}}|z_0|$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $|z_n| \le \dfrac{1}{2^n}|z_0|$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}|z_0| = 0$, d'après les théorèmes de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$.

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

	Initialisation	étape 1	étape 2	Affichage
k		1	2	
u	5	1	– 0,5	– 0,5

Partie B

1.

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur 0,5 u + 0,5 (k – 1) – 1,5 Afficher u Fin de pour

2. $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ mais $u_4 > u_3$ donc la suite (u_n) n'est pas décroissante.

3. **Initialisation :** $u_4 > u_3$, la propriété est initialisée pour $n = 3$.
Hérédité : Montrons que, pour tout n de N, $n \geq 3$, si $u_{n+1} > u_n$ alors $u_{n+2} > u_{n+1}$.
$u_{n+2} = 0{,}5\, u_{n+1} + 0{,}5\,(n + 1) - 1{,}5 = 0{,}5\, u_{n+1} + 0{,}5\, n - 1$
$u_{n+1} > u_n$ donc $0{,}5\, u_{n+1} > 0{,}5\, u_n$ soit $0{,}5\, u_{n+1} + 0{,}5\, n - 1 \geq 0{,}5\, u_n + 0{,}5\, n - 1$ or $0{,}5\, u_n + 0{,}5\, n - 1 = u_{n+1} + 0{,}5$
$u_{n+2} > u_{n+1} + 0{,}5 > 0{,}5$
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0{,}1\, u_n - 0{,}1\, n + 0{,}5$.
$v_{n+1} = 0{,}1\, u_{n+1} - 0{,}1\,(n + 1) + 0{,}5 = 0{,}1\,(0{,}5\, u_n + 0{,}5\, n - 1{,}5) - 0{,}1\,(n + 1) + 0{,}5$
$v_{n+1} = 0{,}1 \times 0{,}5\, u_n + 0{,}05\, n - 0{,}15 - 0{,}1\, n - 0{,}1 + 0{,}5$
$v_{n+1} = 0{,}1 \times 0{,}5\, u_n - 0{,}05\, n + 0{,}25$
$v_{n+1} = 0{,}5\,(0{,}1\, u_n - 0{,}1\, n + 0{,}5)$
$v_{n+1} = 0{,}5\, v_n$, la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5.
$v_0 = 0{,}1\, u_0 + 0{,}5 = 1$ donc $v_n = 0{,}5^n\, v_0$ soit $v_n = 0{,}5^n$

5. $v_n = 0{,}1\, u_n - 0{,}1\, n + 0{,}5$ donc $0{,}5^n = 0{,}1\, u_n - 0{,}1\, n + 0{,}5$
$0{,}1\, u_n = 0{,}5^n + 0{,}1\, n - 0{,}5$ donc en multipliant par 10 : pour tout entier naturel n, $u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5$.

6. $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 5 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Partie A
1.

	Initialisation	Etape 1	Etape 2
a	26	9	8
b	9	8	1
c	8	1	0

2. Lors de l'exécution de l'algorithme, b prend la valeur du dernier reste connu avant l'exécution de la dernière étape

Traitement:	Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Tant que $c \neq 0$ Affecter à d le nombre $r(a, b)$ Affecter à a le nombre b Affecter à b la valeur de c Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Fin Tant que Si $b = 1$ Afficher « a et b sont premiers entre eux » Sinon Afficher « a et b ne sont pas premiers entre eux » Fin Si

Partie B
1. *a.* **Étape 2 :** à la lettre V l'on veut coder, on associe l'entier 21 correspondant
Étape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations $x' \equiv 9 \times 21 + 2\ [26]$ et $0 \leq x' \leq 25$ soit $x' \equiv 201\ [26]$
$201 = 26 \times 7 + 9$ donc $x' \equiv 9\ [26]$ donc $x' = 9$
Étape 4 : à l'entier 9, on associe la lettre J correspondante dans le tableau.

b. Les nombres 9 et 26 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $9\, u + 26\, v = 1$.
$3 \times 9 = 27$ donc $3 \times 9 - 1 \times 26 = 1$ le couple $(3 ; -1)$ convient.

c. $x' \equiv 9\, x + 2\ [26] \Leftrightarrow 3\, x' \equiv 3\,(9\, x + 2)\ [26] \Leftrightarrow 3\, x' \equiv 27\, x + 6\ [26] \Leftrightarrow 3\, x' \equiv x - 20\ [26] \Leftrightarrow x \equiv 3\, x' + 20\ [26]$.

d. **Étape 2 :** à la lettre R que l'on veut coder, on associe l'entier 17 correspondant.
Étape 3 : on calcule l'entier x défini par les relations $x \equiv 3\, x' + 20\ [26]$ et $0 \leq x \leq 25$.
donc $x \equiv 3 \times 17 + 20\ [26]$ or $3 \times 17 + 20 = 71 = 26 \times 2 + 19$ donc $x \equiv 19\ [26]$, $0 \leq x \leq 25$. donc $x = 19$
Étape 4 : à l'entier 19, on associe la lettre T correspondante dans le tableau.
R est décodé par T.

2. J est codé par D or J correspond à 9 et D à 3 donc $3 \equiv 9\, p + 2\ [26]$ soit $9\, p \equiv 1\ [26]$ donc en multipliant par 3 : $27\, p \equiv 3\ [26]$
$27 \equiv 1\ [26]$ donc $p \equiv 3\ [26]$, p est compris entre 0 et 25 et p est unique donc $p = 3$.

3. A la lettre B, on associe le nombre 1, puis $x' \equiv 13 \times 1 + 2\ [26]$ et $0 \leq x' \leq 25$ donc $x' = 15$, à 15 on associe la lettre P
A la lettre D, on associe le nombre 3, puis $x' \equiv 13 \times 3 + 2\ [26]$ et $0 \leq x' \leq 25$ or $3 \times 13 + 2 = 41 = 26 + 15$ donc $x' \equiv 15\ [26]$ donc $x' = 15$, à 15 on associe la lettre P. B et D sont codés par même lettre P, le codage est inefficace.