

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $A(2; -1; -1)$, $\vec{u}(1; 2; 0)$, $\vec{v}(1; 1; -2)$ et $\vec{w}(0; 1; 2)$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A de vecteur normal $\vec{w}$.

On considère les plans Q et R d'équations respectives : $x + 2y = 0$ et $x + y - 2z - 3 = 0$.

2. a. Montrer que l'intersection des plans Q et R est une droite D dont on donnera une représentation paramétrique.

b. Montrer que D passe par A et préciser un des vecteurs directeurs de cette droite.

3. Soit λ un nombre réel. On considère le plan P_λ d'équation : $(1 - \lambda)(x + 2y) + \lambda(x + y - 2z - 3) = 0$.

a. Montrer que la droite D est incluse dans le plan P_λ .

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}_\lambda = (1 - \lambda)\vec{u} + \lambda\vec{v}$ est un vecteur normal du plan P_λ .

c. Donner une valeur de λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.

d. Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?

4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Quel est l'ensemble des points de l'espace qui appartiennent aussi à l'un (au moins) des plans P_λ ?

CORRECTION

1. $M \in P \Leftrightarrow \vec{w} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (y + 1) + 2(z + 1) = 0 \Leftrightarrow y + 2z + 3 = 0$

Une équation cartésienne du plan P passant par A de vecteur normal $\vec{w}$ est $y + 2z + 3 = 0$.

2. a. $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P et $\vec{v}$ un vecteur normal au plan Q, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc l'intersection des plans P et Q est une droite D.

Un point M appartient à D $\Leftrightarrow M \in P$ et $M \in Q \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

Soit $t = y$ alors en remplaçant : $\begin{cases} x + 2t = 0 \\ x + t - 2z - 3 = 0 \end{cases}$ soit $x = -2t$ et en remplaçant dans $x + t - 2z - 3 = 0$ alors $-t - 2z - 3 = 0$

soit $z = -0,5t - 1,5$

$M \in D \Leftrightarrow$ les coordonnées de M sont de la forme $(-2t; t; -0,5t - 1,5)$

Une représentation paramétrique de D est donc $\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = -0,5t - 1,5 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. Soit le point de D tel que $t = -1$, ce point a pour coordonnées $(2; -1; -1)$ donc $A \in D$.

Un vecteur directeur de D est le vecteur de coordonnées $(-2; 1; -0,5)$ ou encore le vecteur qui lui est colinéaire de coordonnées $(4; -2; 1)$.

3. a. Pour tout point de D on a : $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$

donc pour tout point de D, on a $(1 - \lambda)(x + 2y) + \lambda(x + y - 2z - 3) = 0$.

La droite D est contenue dans le plan P_λ .

3. b. Le plan P_λ d'équation : $(1 - \lambda)(x + 2y) + \lambda(x + y - 2z - 3) = 0 \Leftrightarrow x + (2 - \lambda)y - 2\lambda z - 3\lambda = 0$

Un vecteur normal à P_λ est le vecteur $\vec{n}_\lambda$ de coordonnées $(1; 2 - \lambda; -2\lambda)$

$(1 - \lambda)\vec{u} + \lambda\vec{v}$ a pour coordonnées $(1 - \lambda + \lambda; 2 - 2\lambda + \lambda; -2\lambda)$ soit $(1; 2 - \lambda; -2\lambda)$ donc $(1 - \lambda)\vec{u} + \lambda\vec{v} = \vec{n}_\lambda$

c. Si $\lambda = 0$, P_0 est le plan d'équation $x + 2y = 0$ donc $P_0 = P$.

d. Les plans P et P_λ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}_\lambda \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow 3 - \lambda = 0$

Les plans P et P_λ sont perpendiculaires si et seulement si $\lambda = 3$.

4. Soit M un point de l'espace, est-il possible de trouver λ tel que $M \in P_\lambda$?

$M \in P_\lambda \Leftrightarrow x + (2 - \lambda)y - 2\lambda z - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(-y - 2z - 3) + 2y = 0$

Il est possible de déterminer λ si $y + 2z + 3 \neq 0$, alors $\lambda = \frac{2y}{y + 2z + 3}$

Donc si M n'appartient pas au plan d'équation $y + 2z + 3 = 0$, tout point de l'espace appartient à un plan P_λ et un seul.