Partie A
On suppose connu le résultat suivant : Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ alors, pour t réel positif, $p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

• Démontrer l'égalité suivante : $p(X > t) = e^{-\lambda t}$.
• En déduire que, pour s et t réels positifs, l'égalité suivante est vraie : $P_{(X > t)}(X > s + t) = p(X > s)$ (loi de durée de vie sans vieillissement),
$P_{(X > t)}(X > s + t)$ désignant la probabilité de l'évènement $(X > s + t)$ sachant que $(X > t)$ est réalisé.

Partie B
La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ.

1. *a.* Déterminer une expression exacte de λ sachant que $p(T \le 10) = 0,7$.
On prendra, pour la suite de l'exercice, la valeur 0,12 comme valeur approchée de λ.
b. Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle $P_{(T > 10)}(T > 15)$.
c. Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.
2. On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à 0,01 près de la réponse.
On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement, 6 caisses sont ouvertes. On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.
a. Donner la nature et les paramètres caractéristiques de Y.
b. Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes. Déterminer à 0,01 près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

CORRECTION

Partie A
• Démontrer l'égalité suivante : $p(X > t) = e^{-\lambda t}$.

$p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

donc $p(X > t) = 1 - p(X \ge t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$

• En déduire que, pour s et t réels positifs, l'égalité suivante est vraie : $P_{(X > t)}(X > s + t) = p(X > s)$

$p_{(X > t)}(X > s + t) = \dfrac{p((X > t) \cap (X > t + s))}{p(X > t)}$

$p_{(X > t)}(X > s + t) = \dfrac{p((X > t + s))}{p(X > t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+s)+\lambda t}$

$p_{(X > t)}(X > s + t) = e^{-\lambda s} = p(X > s)$

Partie B
1. *a.* Déterminer une expression exacte de λ sachant que $p(T \le 10) = 0,7$.

$p(T \le 10) = 1 - e^{-\lambda \times 10} = 0,7 \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = 1 - 0,7 \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = 0,3$

$\Leftrightarrow -10\lambda = \ln 0,3 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0,3}{10}$

b. Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle $P_{(T > 10)}(T > 15)$.

$p_{(X > t)}(X > s + t) = e^{-\lambda s} = p(X > s)$, en choisissant $t = 10$ et $s = 5$, on obtient que $p_{(T > 10)}(T > 15) = e^{-5\lambda} = e^{-5 \times 0,12} = e^{-0,6}$

c. Sachant qu'un client a déjà attendu 10minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.

$p_{(X > 10)}(X \le 15) = 1 - p_{(T > 10)}(T > 15) = 1 - e^{-0,6}$

$p_{(X > 10)}(X \le 15) \approx 0,45$

2. *a.* On a une succession de 6 expériences aléatoires, identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :
succès : la durée d'attente est supérieure à 10 minutes ($p = 0,3$)
échec : la durée d'attente n'est pas supérieure à 10 minutes ($q = 0,7$)
donc la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes suit une loi binomiale de paramètres (6 ; 0,3)

$p(Y = k) = \binom{6}{k} \times 0,3^k \times 0,7^{6-k}$

b. $p(Y \ge 4) = p(Y = 4) + p(Y = 5) + p(Y = 6)$

$= \binom{6}{4} \times 0,3^4 \times 0,7^2 + \binom{6}{5} \times 0,3^5 \times 0,7 + \binom{6}{6} \times 0,3^6$

$\approx 0,07$