Antilles-Guyane juin 2007

(O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm).

On considère le point A d'affixe $z_A = 1 + i$.

On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe (O ; $\vec{u}$) et h l'homothétie de centre O et de rapport 3.
On pose $s = h \circ S_1$.

Partie A

1. Placer le point A et compléter la figure au fur et à mesure.
2. Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.
3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation s.

4. *a*. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s.

b. Montrer que $z_B = -3\,i\,z_A$. Déterminer une mesure de l'angle ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$).

5. Soient M le milieu de [AB] et P l'image de M par s. Montrer que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. On pose C = s(B).Montrer que P est le milieu de [BC].

2. *a*. Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.

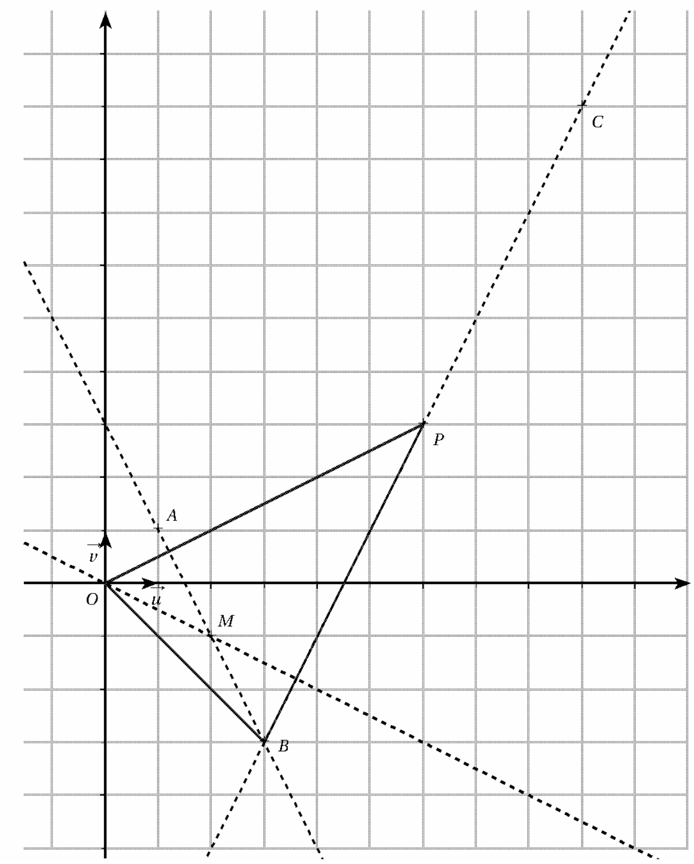
b. Montrer que l'image de la droite (OP) par s est la droite (OM).

c. Que représente le point M pour le triangle OBP ? Justifier.

CORRECTION

Partie A

1.



2. s est la composée d'une similitude indirecte (S_1) par une similitude directe (h), c'est donc une similitude indirecte.

3. S_1 a pour écriture complexe $z \mapsto \overline{z}$ et h a pour écriture complexe $z \mapsto 3\,z$.

$s = h \text{ o } S_1$ *a* donc pour écriture complexe $z \mapsto 3\,\overline{z}$.

4. *a*. $z_B = 3\,\overline{z_A} = 3\,(1 - i) = 3 - 3\,i$.

b. $-3\,i\,z_A = -3\,i\,(1 + i) = -3\,i - 3\,i^2 = 3 - 3\,i = z_B$.

On a alors : ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) = $\arg \dfrac{z_B}{z_A} = \arg(-3\,i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

5. M a pour affixe $z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 2 - i$

P a pour affixe $z_P = 3\,\overline{z_M} = 3\,(2 + i) = 6 + 3\,i$.

On a $\overrightarrow{OP}\,(6\,;\,3)$ et $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,-4)$, donc $\overrightarrow{OP}\,.\,\overrightarrow{AB} = 6 \times 2 + 3 \times (-4) = 0$, donc la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. M est le milieu de [AB], et une similitude conserve les milieux, donc *s*(M) est le milieu de [*s*(A)*s*(B)], soit P est le milieu de [BC].

2. *a*. *s* o *s* a pour écriture complexe : $z' \mapsto 3 \times \overline{3\,\overline{z}} = 9\,z$. *s* o *s* est donc l'homothétie de centre O et de rapport 9.

b. *s*(O) = O et *s*(P) = *s* o *s*(M) or *s* o *s* est une homothétie de centre O, donc les points O, M et *s*(P) sont alignés.
L'image de la droite (OP) par la similitude *s* est la droite passant par *s*(O) et *s*(P) donc par O et M c'est donc la droite (OM).

c. (BM) est perpendiculaire à (OP) d'après la question A 5 donc M appartient donc à la hauteur issue de B dans le triangle OBP.

Une similitude conserve l'orthogonalité donc *s*((BM)) est perpendiculaire à *s*((OP)).
s(B) = C et *s*(M) = P, et *s*((OP)) = (OM), donc (BP) est perpendiculaire à (OM).
M appartient à la hauteur issue de O dans le triangle OBP.
M est donc l'orthocentre du triangle OBP.