

Pondichéry 2002

1. Calculer le P.G.C.D. de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit u la suite numérique définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

2. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u .

3. a. Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n est un entier naturel.

c. En déduire, pour tout entier naturel n , le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1} .

4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

a. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c. Déterminer, pour tout entier naturel n , le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

CORRECTION

1. $4^5 - 1 = 1023$ et $4^6 - 1 = 4095$ or $\begin{matrix} 4095 = 1023 \times 4 + 3 \\ 1023 = 3 \times 341 \end{matrix}$, le dernier reste non nul est 3 donc PGCD ($4^5 - 1$; $4^6 - 1$) = 3

2. $u_2 = 5u_1 - 4u_0 = 5$; $u_3 = 5u_2 - 4u_1 = 21$; $u_4 = 5u_3 - 4u_2 = 85$

3. a. Montrons par récurrence que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $4u_0 + 1 = 1 = u_1$, la propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité : Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $u_{n+1} = 4u_n + 1$, alors $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 1$.

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$ or par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = 4u_n + 1$ donc $4u_n = u_{n+1} - 1$
donc $u_{n+2} = 5u_{n+1} - (u_{n+1} - 1)$ soit $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 1$.

Conclusion : La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n est un entier naturel.

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $u_0 \in \mathbb{N}$, la propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité : Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $u_n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = 4u_n + 1$ or par hypothèse de récurrence, $u_n \in \mathbb{N}$ donc $4u_n + 1 \in \mathbb{N}$ soit $u_{n+1} \in \mathbb{N}$.

Conclusion : La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. $u_{n+1} = 4u_n + 1$ donc $u_{n+1} - 4u_n = 1$, donc pour tout entier naturel n , le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1} est 1.

4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3} = 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right) = 4v_n$

v est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

b. $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{3} \times 4^n$ donc $u_n = v_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 4^n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times (4^n - 1)$.

c. $4^{n+1} - 1 = 3u_{n+1}$ et $4^n - 1 = 3u_n$ donc PGCD ($4^{n+1} - 1$; $4^n - 1$) = PGCD ($3u_{n+1}$; $3u_n$) = 3 PGCD (u_{n+1} ; u_n)
pour tout entier naturel n , le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1} est 1 donc PGCD ($4^{n+1} - 1$; $4^n - 1$) = 3