Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points B (100 ; 100) et C $\left(50 ; \frac{50}{\sqrt{e}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée Γ, est donnée en annexe.

On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

- pour tout x réel, $f(x) = x\,e^{ax+b}$
- les points B et C appartiennent à la courbe Γ.

1. *a*. Montrer que le couple $(a ; b)$ est solution du système : $\begin{cases} 100\,a + b = 0 \\ 50\,a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

b. En déduire que, pour tout x réel, $f(x) = x\,e^{0,01\,x-1}$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. *a*. Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \frac{100}{e} \times 0,01\,x\,e^{0,01\,x}$

b. En déduire la limite de f en $-\infty$.

4. Étudier les variations de la fonction f .On donnera le tableau de variations complet.

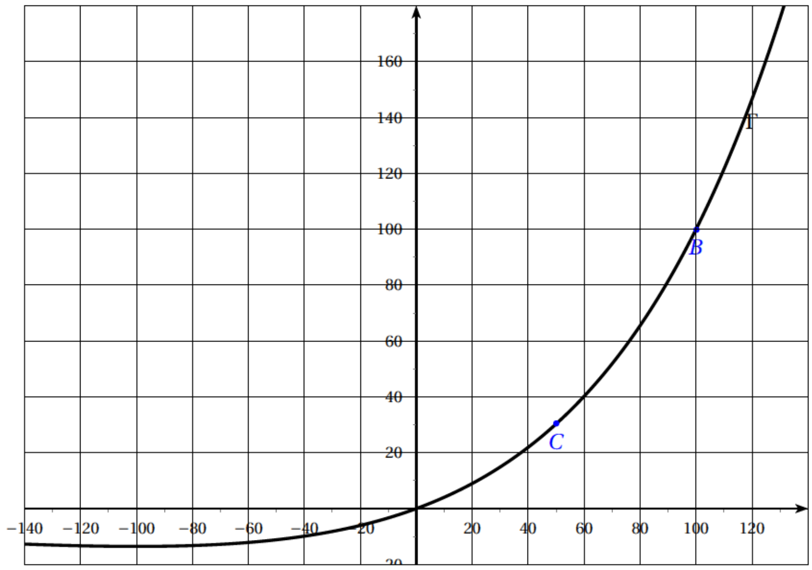
5. Étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite (D).

6. *a*. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_0^{100} f(t)\,dt$.

b. On désigne par A l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite (D) et la courbe Γ.

Calculer A.

Annexe de l'exercice 1



CORRECTION

1. *a*. Les points B et C appartiennent à la courbe Γ donc :

$f(100) = 100$ et $f(50) = \frac{50}{\sqrt{e}}$.

$f(100) = 100$ et $f(50) = \frac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow 100\,e^{100\,a+b} = 100$ et $50\,e^{50\,a+b} = \frac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{100\,a+b} = 1$ et $e^{50\,a+b} = \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow 100\,a + b = 0$ et $50\,a + b = -\frac{1}{2}$

Le couple $(a ; b)$ est solution du système : $\begin{cases} 100\,a + b = 0 \\ 50\,a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 100\,a + b = 0 \\ 50\,a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50\,a = \dfrac{1}{2} \\ 50\,a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{100} \\ 50\,a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0{,}01 \\ 0{,}5 + b = -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0{,}01$ et $b = -1$.

Pour tout x réel, $f(x) = x\,\mathrm{e}^{0{,}01\,x-1}$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}01\,x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \mathrm{e}^{u} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. *a*. $1 = 100 \times 0{,}01$ et $\mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} = \mathrm{e}^{0{,}01\,x} \times \mathrm{e}^{-1}$

donc $x\,\mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} = 100 \times 0{,}01 \times x\,\mathrm{e}^{0{,}01\,x} \times \mathrm{e}^{-1} = (10\,\mathrm{e}^{-1}) \times 0{,}01\,x\,\mathrm{e}^{0{,}01\,x}$.

pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{100}{\mathrm{e}} \times 0{,}01\,x\,\mathrm{e}^{0{,}01\,x}$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}01\,x = -\infty$ et $\lim\limits_{u \to -\infty} u\,\mathrm{e}^{u} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}01\,x\,\mathrm{e}^{0{,}01\,x}.= 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

4. Soit $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} & v'(x) = 0{,}01\,\mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} \end{cases}$

donc $f'(x) = \mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} + x \times 0{,}01\,\mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} = (1 + 0{,}01\,x)\,\mathrm{e}^{0{,}01\,x-1}$.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $1 + 0{,}01\,x$

x	$-\infty$		-100		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	-100	↗	$+\infty$

5. $f(x) - x = x\,(\mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} - 1)$, $\mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} > 1$

$\Leftrightarrow 0{,}01\,x - 1 > 0 \Leftrightarrow x\ 100$

x	$-\infty$		0		100		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x\,(\mathrm{e}^{0{,}01\,x-1} - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$

Sur $]-\infty\,;\,0\,[\ \cup\ ]\,100\,;\,+\infty\,[$, $f(x) - x > 0$ donc la courbe Γ est au dessus de C sur ces intervalles.

Sur $]\,0\,;\,100\,[$, $f(x) - x < 0$ donc la courbe Γ est en dessous de C sur $]\,0\,;\,100\,[$.

La courbe et la droite se coupent aux points d'abscisses 0 et 100.

6. *a*. Soit $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{0{,}01\,t-1} & u'(t) = \dfrac{1}{0{,}01}\,\mathrm{e}^{0{,}01\,t-1} = 100\,\mathrm{e}^{0{,}01\,t-1} \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{cases}$

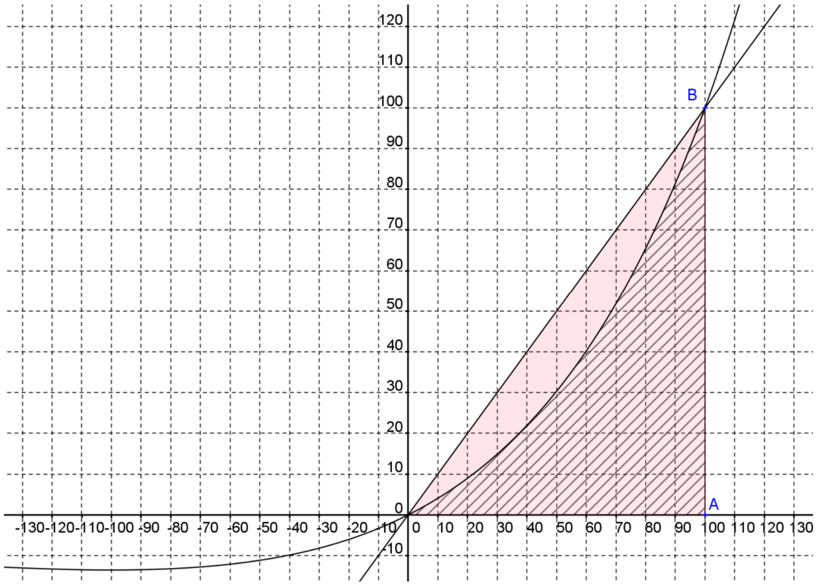
donc $\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\,100\,t\,\mathrm{e}^{0{,}01\,t-1}\Big]_0^{100} - \int_0^{100} 100\,\mathrm{e}^{0{,}01\,t-1}\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t = 10\,000 - \Big[\,10\,000\,\mathrm{e}^{0{,}01\,t-1}\Big]_0^{100}$ donc $\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t = 10\,000 - (\,10\,000 - 10\,000\,\mathrm{e}^{-1}\,) = 10\,000\,\mathrm{e}^{-1}$ unités d'aire

b. L'aire du triangle OAB (aire colorée en rose) est égale à $\dfrac{1}{2} \times 100 \times 100$ soit 5 000 unités d'aire.

$\displaystyle\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t$ représente l'aire du domaine hachuré.

Sur $[\,0\,;\,100\,]$, la courbe Γ est en dessous de C sur $]\,0\,;\,100\,[$ donc $\mathrm{A} = 5\,000 - \displaystyle\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t = 5\,000\,(\,1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}\,)$



120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
B
A
-130 -120 -110 -100 -90 -80 -70 -60 -50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130