

Amérique du Sud novembre 2006

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. Question de cours

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$ ».

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

- a. Démontrer que : $\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.
 - b. Interpréter géométriquement le nombre $\frac{p-m}{n-m}$.
2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 4 + i$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 5i$ et $z_D = -3 - i$. Placer ces points sur une figure.
3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
- $$z' = (1 + 2i)z - 2 - 4i.$$
- a. Préciser les images des points A et B par f .
 - b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω , dont on précisera l'affixe ω .
 4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z , on a : $z' - z = -2i(2 - i - z)$.
 - b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω , la valeur de $\frac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'})$.
 - c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?
 - d. Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - i\sqrt{3}$. Écrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

CORRECTION

EXERCICE 2

3. a. $f(A)$ est le point d'affixe $a' = (1 + 2i)(4 + i) - 2 - 4i$
 $a' = (4 + 8i) + i - 2 - 4i$
 $a' = 5i$

$f(B)$ est le point d'affixe $b' = (1 + 2i)(1 + i) - 2 - 4i$
 $b' = (1 + 2i) + i - 2 - 4i$
 $b' = -3 - i$

3. b. Ω est invariant par $f \Leftrightarrow \omega = (1 + 2i)\omega - 2 - 4i$
 $\Leftrightarrow 2i\omega = 2 + 4i$
 $\Leftrightarrow \omega = 2 - i$

4. a. $z' = (1 + 2i)z - 2 - 4i$
 $z' - z = 2iz - 2 - 4i$
 $z' - z = 2i(z + i - 2)$
 $z' - z = -2i(-z - i + 2)$

4. b. $|z' - z| = |-2i| |-z - i + 2|$
 $|z' - z| = 2|\omega - z|$ donc $MM' = 2\Omega M$ soit $\frac{MM'}{\Omega M} = 2$
 $(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'}) = \arg \frac{z' - z}{\omega - z}$ à 2π près $\Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'}) = \arg(-2i)$ à 2π près $\Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{2}$ à 2π près

4. c. $(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{2}$ donc le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M.

4. d. $z_E = 2 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ donc $|z_E| = 2$ et $\arg z_E = \pi + \frac{\pi}{3}$ à 2π près donc $z_E = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Le triangle $\Omega EE'$ est rectangle en E donc E' appartient à la perpendiculaire en E à (ΩE)

$\frac{EE'}{\Omega E} = 2$ donc $EE' = 2\Omega E$

