Asie juin 2012

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 point.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite D dont on donne une représentation paramétrique, et le plan P dont on donne une équation cartésienne :

$$\text{D} \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et P} : 3x + 2y - z - 5 = 0.$$

Affirmation 1 : la droite D est strictement parallèle au plan P.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A(1 ; 9 ; 0) et le plan P d'équation cartésienne : $4x - y - z + 3 = 0$.

Affirmation 2 : la distance du point A au plan P est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{3}{1 + e^{-2x}}$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Affirmation 3 : la courbe C admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

4. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x (2 - t)\, e^{-t}\, dt$.

Affirmation 4 : $F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1.

5. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^e t^2 \ln t \, dt$.

Affirmation 5 : la valeur exacte de l'intégrale I est : $\dfrac{2e^3 + 1}{9}$.

EXERCICE 2 5 points Candidats *n*'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct.

On note r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère le point A, d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$, le point A_1 d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ où $\overline{z_A}$ désigne le conjugué de z_A.

On note enfin B image du point A, par la rotation r et z_B l'affixe du point B.

1. ***a.*** Écrire le nombre complexe z_A sous forme exponentielle, puis placer les points A et A_1, dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.

b. Vérifier que $z_B = 2\, e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sous forme exponentielle, puis écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.

Placer alors le point B dans le même repère.

2. On considère le vecteur unitaire $\vec{w}$, tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \dfrac{\pi}{12}$, et la droite Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$.

a. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

b. Tracer la droite Δ, puis démontrer que Δ est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ.

3. On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe $(O ; \vec{u})$ et B' l'image de B_1 par la rotation r. Démontrer que $B' = A_1$.

4. Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit C le point d'affixe $\sqrt{2}\,(1 + i)$ et D le symétrique de C par rapport à la droite Δ.

Construire les points C et D, puis calculer l'affixe du point D.

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A - Détermination d'une similitude directe

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = -\sqrt{3} + i$.

1. *a.* Ecrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

b. Placer les points A et B dans le repère. On prendra 1 cm comme unité graphique.

2. *a.* Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe f de centre O qui transforme le point A en B.

b. Préciser les éléments caractéristiques de la similitude f.

Partie B. Étude d'une transformation

Le but de cette partie est d'étudier la transformation $g = s \circ f$, où f désigne la similitude définie dans la partie A et s la réflexion d'axe $(O ; \vec{u})$.

1. Soit M un point quelconque du plan. On désigne par M' l'image du point M par la transformation g.

On note z et z' les affixes respectives des points M et M', et $\overline{z}$ le conjugué de z.

a. Démontrer l'égalité : $z' = 2\, e^{-\frac{i\pi}{6}}\, \overline{z}$

b. On pose C = g (A) et D = g (C). Calculer les affixes respectives des points C et D, puis placer les points C et D sur la figure.

c. Quelle est la nature du triangle OAC ?

d. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.

2. Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer la nature de la transformation $g \circ g$ et préciser ses éléments géométriques.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.

Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes.

Démontrer que $p = 0{,}42$.

2. Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

b. Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. *a.* Justifier l'égalité : $p(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$

b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.

2. On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k.

On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

EXERCICE 4 **5 points** **Commun à tous les candidats**

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictement positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANTQUE n < N Affecter à n la valeur n + 1 Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

.

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et N = 2. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ et, pour tout entier naturel } n :\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. *a.* Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$.

3. *a.* Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Comparer v_{n+1}^2 et u_{n+1}^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

1. Affirmation 1 : VRAIE

Une droite dans l'espace est soit strictement parallèle au plan P et donc n'a pas de point d'intersection avec P, soit est contenue dans P et donc a une infinité de points communes avec P, soit perce le plan P et a donc un seul point commun avec P.
Cherchons les points communs à P et à D,

un tel point a des coordonnées qui vérifient simultanément : $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 4t \end{cases}$ ($t \in$ R) et $3x + 2y - z - 5 = 0$.

donc $3(1 - 2t) + 2t - (-5 - 4t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 3 - 6t + 2t + 5 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$
ceci est impossible donc D et P *n*'ont pas de point commun, D est parallèle à P.

On aurait aussi pu montrer que le vecteur $\vec{n}$, vecteur normal au plan P, de coordonnées (3 ; 2 ; – 1) et le vecteur $\vec{u}$, vecteur directeur de D, de coordonnées (– 2 ; 1 ; – 4) sont orthogonaux :
$\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 \times (-2) + 2 \times 1 - 1 \times (-4) = -6 + 2 + 4 = 0$ donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux : D est parallèle à P.

2. Affirmation 2 : FAUSSE

la distance $d(M_0, \text{P})$ du point M_0 au plan P d'équation a $x + b\,y + c + d = 0$ est telle que : $d(M_0, \text{P}) = \dfrac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

donc a distance du point A au plan P est égale à $\dfrac{|4 \times 1 - 9 - 0 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

3. Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{3}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Affirmation 3 : VRAIE

$\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ donc par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \mathrm{e}^{-2x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

La courbe C admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ et $y = 1$

4. Affirmation 4 : FAUSSE

Soit $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{-t} & u(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v(t) = 2 - t & v'(t) = -1 \end{cases}$ donc $\text{F}(x) = \left[-(2 - t)\,\mathrm{e}^{-t}\right]_1^x - \displaystyle\int_1^x -(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$

$\text{F}(x) = -(2 - x)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1} - \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_1^x$

$\text{F}(x) = -(2 - x)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1} - (-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1}) = -(2 - x)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$

$\text{F}(x) = (x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, donc quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1, $\text{F}(x) \geq 0$

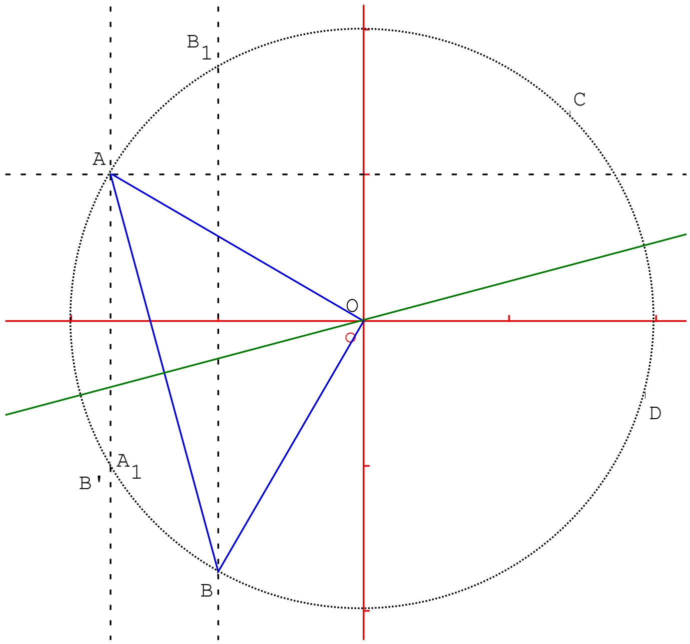
5. Affirmation 5 : VRAIE

Soit $\begin{cases} u'(t) = t^2 & u(t) = \dfrac{1}{3}t^3 \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$ donc $\text{I} = \left[\dfrac{1}{3}t^3 \ln t\right]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{1}{3}t^3 \times \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

$\text{I} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \text{I} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{3}t^3\right]_1^{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \text{I} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{9} \Leftrightarrow \text{I} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^3 + 1}{9}$

EXERCICE 2 5 points Candidats *n*'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $z_A = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$



b. La rotation r a pour écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}\,z$ donc $z_B = e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)}$ donc $z_B = 2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$ donc $z_B = 2\,e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

$z_B = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = -1-\sqrt{3}\,i$

2. *a.* B est l'image du point A, par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc OA = OB et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}$ à 2 π près, donc le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

b. $\vec{w}$ est un vecteur unitaire tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{12}$ donc a pour affixe $e^{i\frac{\pi}{12}}$.

$(\overrightarrow{OA}, \vec{w}) = \arg\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}}\right)$ or $\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}\,e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$ donc $(\overrightarrow{OA}, \vec{w}) = -\frac{3\pi}{4}$ à 2 π près,

$(\vec{w}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{2\,e^{i\frac{-2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{12}}}\right)$ or $\frac{2\,e^{i\frac{-2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{12}}} = 2\,e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)} = 2\,e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$ donc $(\vec{w}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{3\pi}{4}$ à 2 π près,

$(\overrightarrow{OA}, \vec{w}) = (\vec{w}, \overrightarrow{OB})$ donc la droite Δ est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Le triangle OAB est rectangle isocèle en O, donc la droite Δ qui est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est aussi la médiatrice de [AB] donc les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ.

3. B_1 a pour affixe $\overline{z_B}$, B' est l'image de B_1 par la rotation r donc a pour affixe $i\,\overline{z_B} = i(-1+\sqrt{3}\,i) = -i-\sqrt{3}$

$z_A = -\sqrt{3}+i$, le point A_1 a pour affixe $z_{A_1} = \overline{z_A} = -\sqrt{3}-i$ donc B' et A_1 ont la même affixe donc $B' = A_1$.

4. Le point C a pour affixe $2\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $(\vec{w}, \overrightarrow{OC}) = \arg\left(\frac{2\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{12}}}\right)$ or $\frac{2\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{12}}} = 2\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)} = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $(\vec{w}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{6}$ à 2 π près,

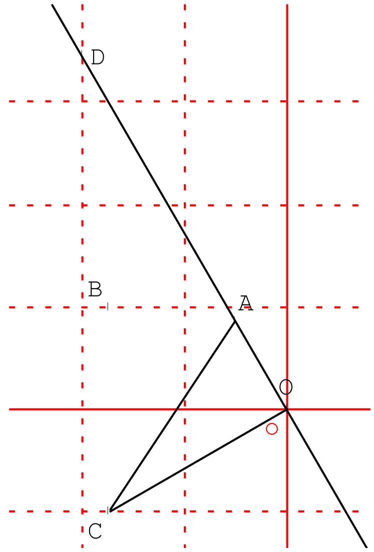
Si D est le symétrique de C par rapport à la droite Δ alors le triangle OCD est isocèle et Δ est la médiatrice de [CD]donc la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$ donc $(\overrightarrow{OD}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6}$ à 2 π près, et OD = 2

donc $(\overrightarrow{OD}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{u}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}$ à 2 π près, soit $(\vec{u}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{12}$ et OD = 2 donc D a pour affixe $2\,e^{i\frac{-\pi}{12}}$.

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A - Détermination d'une similitude directe

1. ***a.*** $z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_B = -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$



b.

2. ***a.*** Une similitude directe a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$, O est le centre de f donc $b = 0$

$f(A) = B$ donc $2\,e^{i\frac{5\pi}{6}} = a\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $a = 2\,\frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 2\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc l'écriture complexe de la similitude directe f de centre O qui transforme le point A en B est $z' = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}\,z$.

b. Le rapport de f est égal à $|\,a\,|$ donc est égal à 2. L'angle de f est arg a donc est égal à $\frac{\pi}{6}$.

Partie B. Étude d'une transformation

1. ***a.*** L'écriture complexe de s est $z' = \overleftrightarrow{z}$ donc $M(z) \xrightarrow{f} M_1(z_1) \xrightarrow{s} M'(z')$ avec $z_1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}\,z$ et $z' = \overleftrightarrow{z_1} = 2\,e^{-\frac{i\pi}{6}}\,\overleftrightarrow{z}$

L'écriture complexe de g est : $z' = 2\,e^{-\frac{i\pi}{6}}\,\overleftrightarrow{z}$

b. $z_C = 2\,e^{-\frac{i\pi}{6}}\,\overleftrightarrow{z_A} = 2\,e^{-\frac{i\pi}{6}} \times e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\,e^{i\frac{-5\pi}{6}}$ donc $z_C = -\sqrt{3} - i$

$z_D = 2\,e^{-\frac{i\pi}{6}}\,\overleftrightarrow{z_C} = 2\,e^{-\frac{i\pi}{6}} \times 2\,e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 4\,e^{i\pi}$ donc $z_D = -2 + 2\sqrt{3}$.

c. $OA = |\,z_A\,| = 1$; $OC = |\,z_C\,| = 2$ et $AC^2 = |\,z_C - z_A\,|^2 = \left|\left(-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right) + i\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|^2 = \left(-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$AC^2 = 3 + \frac{1}{4} - \sqrt{3} + 1 + \frac{3}{4} + \sqrt{3} = 5$ donc $AC^2 = OC^2 + OA^2$

Le triangle OAC est rectangle en O.

d. $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $-2\,;2\sqrt{3}$ donc $\overrightarrow{OD} = 4\,\overrightarrow{OA}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires, les points O, A et D sont alignés.

2. La transformation $g \circ g$ a pour écriture complexe $z' = 2\,e^{-\frac{i\pi}{6}}\,\overleftrightarrow{Z} = 2\,e^{-\frac{i\pi}{6}}\,2\,\overline{\left(2\,e^{-\frac{i\pi}{6}}\,\bar{z}\right)} = 2\,e^{-\frac{i\pi}{6}} \times 2\,e^{\frac{i\pi}{6}}\,z = 4\,z$

$g \circ g$ a pour écriture complexe $z' = 4\,z$ donc $g \circ g$ est une homothétie de centre O de rapport 4.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. Le joueur prélève au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne donc le nombre de cas possibles est 10^2

Le nombre de cas favorables est celui d'obtenir d'abord une boule blanche puis une noire ou d'obtenir d'abord une boule noire puis une blanche, le nombre de cas favorables est $2 \times 3 \times 7 = 42$

La probabilité que le joueur gagne la partie est égale à $\frac{42}{100}$ donc $p = 0,42$.

2. *a.* Soit l'expérience : « prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne »

On a une succession de n expériences aléatoires identiques et indépendantes. Chacune d'elle a deux issues :

- le joueur gagne la partie ($p = 0,42$)
- le joueur ne gagne pas la partie ($q = 1 - p = 0,58$)

donc la variable aléatoire X qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, suit une loi binomiale de paramètres n et p.

b. $p_n = p(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - 0,58^n$

$p_{10} = 1 - 0,58^{10} \approx 0,996$

c. Chercher le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 % revient à résoudre $p_n \geq 0,99$

$1 - 0,58^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,99 \geq 0,58^n \Leftrightarrow \ln 0,01 \geq \ln 0,58^n \Leftrightarrow \ln 0,01 \geq n \ln 0,58 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,58}$

$\frac{\ln 0,01}{\ln 0,58} \approx 8,45$ donc le nombre minimal de parties est 9.

Partie B

1. *a.* Un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ;

Le joueur prélève au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne donc le nombre de cas possibles est $(k + 3)^2$

Le nombre de cas favorables est celui d'obtenir d'abord une boule blanche puis une noire ou d'obtenir d'abord une boule noire puis une blanche, le nombre de cas favorables est $2 \times 3 \times k = 6k$

La probabilité que le joueur gagne la partie est égale à $\frac{6k}{(k+3)^2}$ donc $p(\mathrm{Y}_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.

b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.

un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ; le nombre de cas favorables est donc 3^2

donc $p(\mathrm{Y}_k = -9) = \frac{9}{(k+3)^2}$.

un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ; le nombre de cas favorables est donc k^2

donc $p(\mathrm{Y}_k = -1) = \frac{k^2}{(k+3)^2}$.

y	-9	-1	5	Total
$\mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = y)$	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$	1
$y\,\mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = y)$	$-\frac{81}{(k+3)^2}$	$-\frac{k}{(k+3)^2}$	$\frac{30k}{(k+3)^2}$	$-\frac{k^2 - 30k + 81}{(k+3)^2}$

2. $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_k) = -\frac{k^2 - 30k + 81}{(k+3)^2}$, pour tout $k \geq 2$, $(k + 3)^2 > 0$ donc a le même signe que $-(k^2 - 30k + 81)$

$x^2 - 30x + 81$ admet deux solutions $x_1 = 3$ et $x_2 = 27$ donc :

k	2		3		27		$+\infty$
$\mathrm{E}(\mathrm{Y}_k)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_k)$ est strictement positive donc pour $3 < k < 27$

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

1.

n	a	b	u	v
0	4	9	4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

2. *a.* Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

Initialisation : $u_0 = a$, $v_0 = b$ or a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ donc $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$

Hérédité : Montrons pour tout n de $\mathbb{N}$, que si $u_n > 0$ et $v_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.

$u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ or $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$

et $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$ or $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $v_{n+1} > 0$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)^2$.

$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \dfrac{u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n}{4}$.

$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{2u_n^2 + 2v_n^2}{4} - \dfrac{u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n}{4} = \dfrac{u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n}{4}$

pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geq 0$

donc $v_{n+1}^2 \geq u_{n+1}^2$, or pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $v_n \geq u_n$. Pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$.

3. *a.* $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ or pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$ donc $\dfrac{u_n + u_n}{2} \leq \dfrac{u_n + v_n}{2}$ soit $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

b. pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$ or $\left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2 \geq 0$ donc $v_{n+1}^2 \geq u_{n+1}^2$.

$v_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}$ or pour tout entier naturel n, on a $u_n^2 \leq v_n^2$ donc $\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} \leq \dfrac{v_n^2 + v_n^2}{2}$ donc $v_{n+1}^2 \leq v_n^2$

or pour tout n entier naturel, $v_n \geq 0$ donc $v_{n+1} \leq v_n$, donc la suite (v_n) est décroissante.

4. Pour tout n entier naturel, $u_n \leq v_n$ or la suite (v_n) est décroissante donc $v_n \leq v_0$ donc pour tout n entier naturel, $u_n \leq v_0$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc est convergente.

Pour tout n entier naturel, $0 \leq v_n$. La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0 donc est convergente.

Soit ℓ la limite de (u_n) et L la limite de (v_n) pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ donc $\ell = \dfrac{\ell + L}{2}$ donc $\ell = L$.