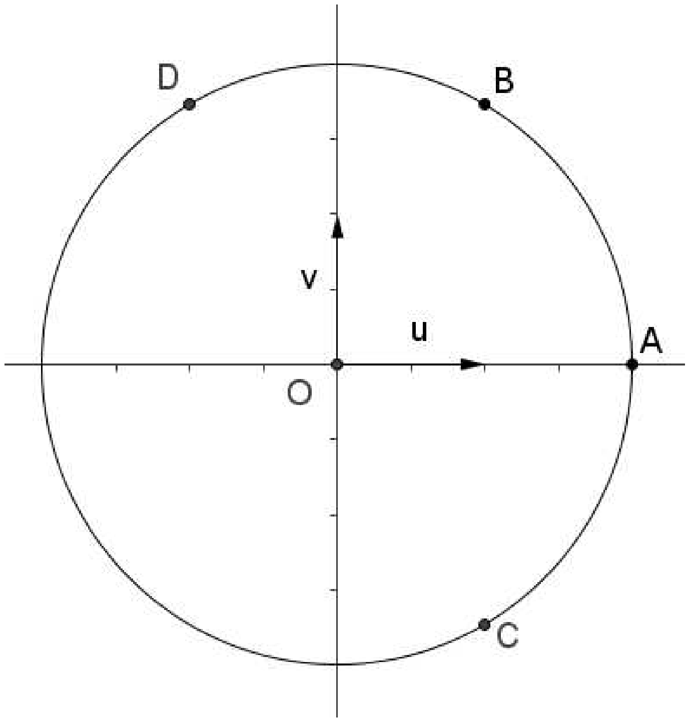
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle c de centre O passant par A.

Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α.



1) *a*) Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle c.

2) Soit D un point du cercle c d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

a) Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3) Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

a) Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b) On admet que le point G a pour affixe $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.

Démontrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1) *a*).

En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

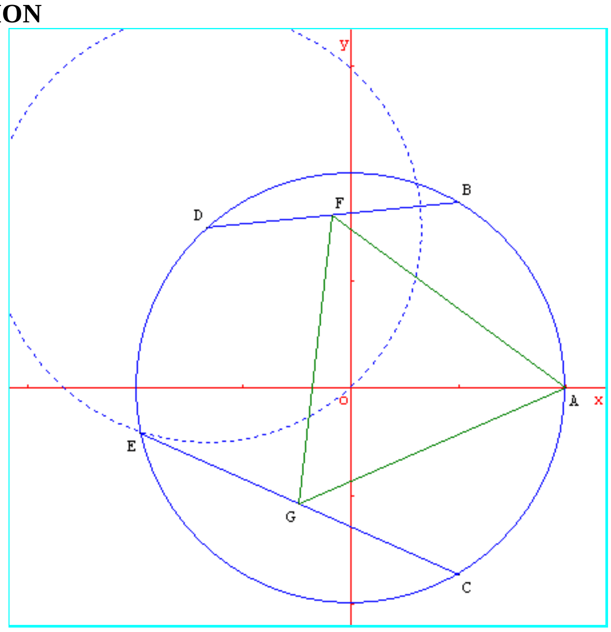
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.

On admet que $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ par $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$. Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$. Compléter ce tableau de variation. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

CORRECTION



1) *a*) $\alpha - 2 = -1 + i\sqrt{3}$ donc $(\alpha - 2)^2 = 1 - 3 - 2i\sqrt{3}$ soit $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = -2 - 2i\sqrt{3}$

$\alpha^2 - 4\alpha = -6 - 2i\sqrt{3}$

or $2\overline{\alpha} - 8 = 2(1 - i\sqrt{3}) - 8 = -6 - 2i\sqrt{3}$

donc $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b) $\alpha - 2 = -1 + i\sqrt{3}$ donc $|\alpha - 2| = 2$ donc OB = OA

de même $\overline{\alpha} - 2 = -1 - i\sqrt{3}$ donc $|\overline{\alpha} - 2| = 2$ donc OC = OA

Les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

2) *a*) Il suffit de tracer un triangle équilatéral direct donc de tracer le cercle de centre D passant par O

b) $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D = 2\ e^{i\frac{\pi}{3}}\ e^{i\theta} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{i\theta}$ donc $z_E = \alpha\ e^{i\theta}$.

3) *a*) $z_F = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b) $z_G = \frac{\alpha\ e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$ donc $z_G - 2 = \frac{\alpha\ e^{i\theta} + \overline{\alpha} - 4}{2}$ or $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$ donc $\overline{\alpha} - 4 = \frac{\alpha^2 - 4\alpha}{2}$

donc $z_G = \frac{\alpha\ e^{i\theta} + \frac{\alpha^2 - 4\alpha}{2}}{2} = \frac{2\alpha\ e^{i\theta} + \alpha^2 - 4\alpha}{4} = \frac{1}{4}\alpha\,(2\ e^{i\theta} + \alpha - 4)$

$z_F - 2 = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2 = \frac{1}{2}(\alpha + 2\ e^{i\theta} - 4)$ donc $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\frac{1}{4}\alpha\,(2\ e^{i\theta} + \alpha - 4)}{\frac{1}{2}(2\ e^{i\theta} + \alpha - 4)} = \frac{\alpha}{2}$

$\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $\frac{\alpha}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\left|\frac{z_G - 2}{z_F - 2}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

donc AG = AF et $(\overrightarrow{AF}\,;\overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ donc le triangle AFG est équilatéral.

4) $f(-\pi) = 7$; $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4 - 2\sqrt{3}$; $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$; $f(\pi) = 7$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f	7	$\searrow$	$4 - 2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$4 + 2\sqrt{3}$	$\searrow$	7

f admet un minimum absolu en $-\frac{\pi}{6}$, pour la position de D correspondante (D d'affixe $2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$, la longueur AF sera minimale et égale à $4 - 2\sqrt{3}$.