Métropole juin 2009

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

c. Sur l'annexe à rendre avec la copie, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.

À partir de u_0, en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2, u_3 et u_4.
Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit (w_n) la suite de premier terme w_0 et telle que, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$.

On suppose que w_0 est strictement supérieur à 6. Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.

CORRECTION

1. *a.* $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

Si $n = 0$ alors $u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{9}{2}$ Si $n = 1$ alors $u_3 = \frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{21}{4}$ Si $n = 2$ alors $u_4 = \frac{3}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_2 = \frac{45}{8}$

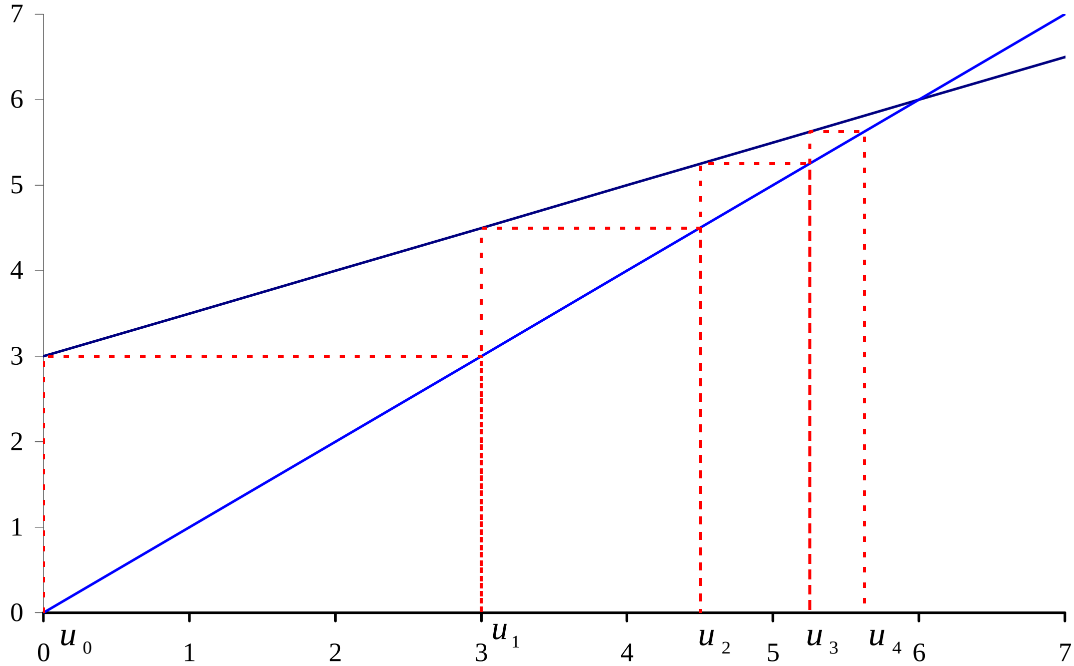
b. $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ donc $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 3$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$; si $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ alors $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$.

$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ or $\frac{1}{2}u_n = u_{n+1} - 3$ donc $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - (u_{n+1} - 3) = \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$

c.



La suite (u_n) semble être croissante et converger vers 6

2. *a.* $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2} u_n + 3 - 6$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2} v_n$

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -6$.

b. la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -6$ donc $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ soit $v_n = -6 \times 0{,}5^n$

$u_n = v_n + 6$ donc $u_n = 6 - 6 \times 0{,}5^n$.

c. $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

3. Cherchons le sens de variation de (u_n) : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} u_n + 3 - u_n = \frac{1}{2}(6 - u_n)$ or $6 - u_n = -v_n$ donc $6 - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Avec les mêmes raisonnements que précédemment, la suite définie par $W_n = w_n - 6$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $W_0 = w_0 - 6$, w_0 est strictement supérieur à 6 donc $W_0 > 0$ de plus $W_n = W_0 \times 0{,}5^n$ et $W_n > 0$ et $w_n = 6 - W_0 \times 0{,}5^n$.

Cherchons le sens de variation de (w_n) : $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2} w_n + 3 - w_n = \frac{1}{2}(6 - w_n)$ or $6 - w_n = -W_n$ donc $6 - w_n > 0$ donc la suite (w_n) est croissante.

$w_n - u_n = 6 - W_0 \times 0{,}5^n - (6 - 6 \times 0{,}5^n)$ donc $w_n - u_n = (6 - W_0) \times 0{,}5^n$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n - u_n = 0$

La suite (u_n) est croissante, la suite w_n est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n - u_n = 0$ donc les suites (u_n) et (w_n) sont adjacentes.