ENONCE

A. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2\,x^3 + x^2 - 1\ .$$

1° Étudier les variations de g .

2° En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α telle que $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f\,(x) = \dfrac{1}{3}\left(x^{\,2} + x + \dfrac{1}{x}\right)$.

On désigne par C , sa courbe représentative.

1° Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

2° En utilisant la partie A, déterminer les variations de f et dresser son tableau des variations.

3° Soit I le point de C , d'abscisse – 1 et J le point de C , d'abscisse 1.

a) Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à C .

b) Déterminer une équation de la tangente T en I à C .

c) Étudier la position de C , par rapport à T.

4° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{3}\,(x^{\,2} + x)$ et P sa courbe représentative dans le même repère que la courbe C .

a) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $x \to f\,(x) - h(x)$.

Que peut-on dire des courbes C et P en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Étudier la position relative des courbes C et P.

5° Construire P, (IJ) , T et la courbe C .

CORRECTION

Partie A

1. $g(x) = 2\,x^3 + x^2 - 1$ donc $g'(x) = 6\,x^2 + 2\,x = 2\,x\,(3\,x + 1)$

d'où le signe de $g'(x)$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		0		$+\infty$
$2\,x$		$-$		$-$	0	$+$	
$3\,x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$g\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{26}{27}$ et $g(0) = -1$

2. g est croissante sur $]-\infty\,;-1/3\,[$ et décroissante sur $]-1/3\,;\,0]$ donc g admet un maximum en $-\dfrac{1}{3}$; $g\left(-\dfrac{1}{3}\right) < 0$ donc pour tout x de $]-\infty\,;\,0\,]$, $g\,(x) \le -\dfrac{26}{27}$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty\,;\,0]$

g est définie dérivable, strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$, $g\,(]\,0\,;+\infty\,[) =]-1\,;+\infty\,[$, donc $0 \in g(]\,0\,;+\infty\,[)$ donc l'équation $g\,(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc sur $\mathbb{R}$.

$g(0{,}65) < 0$ et $g(0{,}66) > 0$ et l'équation $g\,(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

Partie B

1. $x^{\,2} + x = x\,(x + 1)$ donc $\displaystyle\lim_{|x| \to +\infty} x^{\,2} + x = +\infty$ de plus $\displaystyle\lim_{|x| \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{|x| \to +\infty} f\,(x) = +\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{\,2} + x = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f\,(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} x^{\,2} + x = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f\,(x) = -\infty$

2. $f\,'(x) = \dfrac{1}{3}\left(2\,x + 1 - \dfrac{1}{x^{\,2}}\right) = \dfrac{g(x)}{3\,x^2}$ donc $f\,'(x)$ a le même signe que $g(x)$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		0		α		$+\infty$
g		$\nearrow$	$-\dfrac{26}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$g(x)$		$-$	$-$		$-$		0	$+$	

donc si $x < \alpha$, $g(x) < 0$; si $x = \alpha$, $g(x) = 0$; si $x > \alpha$, $g(x) > 0$
d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

avec $m = f(\alpha)$

3. *a*. $f'(1) = \frac{2}{3}$ et $f(1) = 1$ donc une équation de la tangente T' en J à C est $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$f(-1) = -\frac{1}{3}$ donc I a pour coordonnées $\left(-1 ; -\frac{1}{3}\right)$

Le point d'abscisse -1 de la tangente T' a pour ordonnée :

$y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ donc I appartient à T donc T' = (IJ)

3. *b*. $f'(-1) = -\frac{2}{3}$ et $f(-1) = -\frac{1}{3}$ donc une équation de la tangente T en I à C est $y = -\frac{2}{3}x - 1$

3. *c*. $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = \frac{1}{3}\left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} + 3\right)$

$f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = \frac{1}{3x}\left(x^3 + 3x^2 + + 3x + 1\right)$

$f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = \frac{1}{3x}(x+1)^3$

donc $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right)$ a le même signe que $\frac{1}{3x}(x+1)^3$ donc que $\frac{x+1}{x}$

si $x < -1$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) > 0$ donc C est au dessus de T

Si $x = -1$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) = 0$, I est point de contact de C et de T.

si $-1 < x < 0$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) < 0$ donc C est en dessous de T

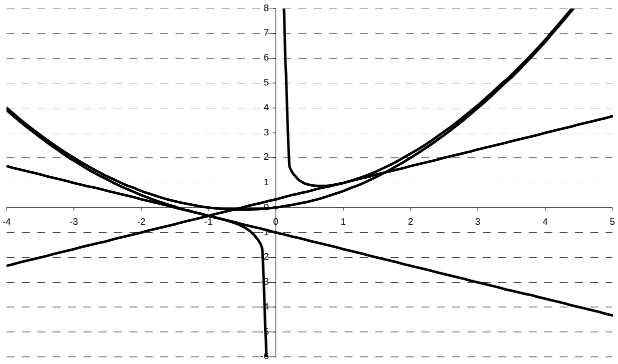
si $x > 0$, $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x - 1\right) > 0$ donc C est au dessus de T

4. *a*. $f(x) - h(x) = \frac{1}{3x}$ donc $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) - h(x) = 0$

La courbe P est asymptote à la courbe C en $+\infty$ et $-\infty$.

4. *b*. $f(x) - h(x) = \frac{1}{3x}$ donc

si $x < 0$, $f(x) - h(x) < 0$ donc C est en dessous de T
si $x > 0$, $f(x) - h(x) > 0$ donc C est au dessus de T


8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5